

**ЗАКЛАД ВИЩОЇ ОСВІТИ «УНІВЕРСИТЕТ КОРОЛЯ ДАНИЛА»**

*Остафійчук П.Г.*

***Математика  
для економістів***

**Навчально-методичний посібник  
для самостійного вивчення дисципліни**

*Івано-Франківськ*

*2021*

*Рекомендовано Вченою радою Закладу вищої освіти  
«Університет Короля Данила»  
( Протокол №11 від 29.04.2021)*

Рецензент:

**Коломієць А.М.**, кандидат фізико-математичних наук, доктор педагогічних наук, професор кафедри основ фундаментальних дисциплін Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського;

**Бойчук А.М.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних технологій Закладу вищої освіти «Університет Короля Данила».

Остафійчук П.Г. Математика для економістів: навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. Вид. 2-ге, допов. – Івано-Франківськ: Репозитарій / ЗВО «Університет Короля Данила», 2021. – 106 с.

Навчально-методичний посібник коротко охоплює всі теми з вищої математики та теорії ймовірностей, які за програмою підготовки бакалавра є обов'язковими для студентів економічних спеціальностей. Містить приклади розв'язування типових задач як математичного, так і суто економічного характеру, а також методичні поради щодо вивчення кожної з тем.

Рекомендований для студентів економічних спеціальностей закладів вищої освіти та фахової передвищої освіти.

Буде цікавим і корисним для тих, хто вивчає економіку і стикається з статистичними та економічними моделями в економіці.

## Зміст

<b>Вступ</b> .....	5
<b>1. Модуль 1. Вища математика.</b> .....	7
1.1. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії.....	7
1.2. Елементи теорії матриць та визначників.....	10
1.3. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	14
1.4. Елементи матричного аналізу.....	18
1.5. Елементи теорії границь.....	19
1.6. Диференціальне числення функції однієї змінної.....	22
1.7. Граничний (маргінальний) аналіз.....	26
1.8. Дослідження функцій та побудова графіків.....	29
1.9. Основні поняття функції багатьох змінних та її інтерпретація в економічній теорії.....	33
1.10. Диференційованність функції багатьох змінних.....	34
1.11. Екстремуми та умовні екстремуми функції багатьох змінних.....	36
1.12. Інтегральне числення.....	39
1.13. Економічна динаміка та її моделювання: диференціальні та різницеві рівняння.....	43
1.14. Ряди та їх застосування.....	45
<b>2. Модуль 2. Теорія ймовірностей та математична статистика</b> .....	48
2.1. Емпіричні та логічні основи теорії ймовірностей.....	48
2.2. Основні теореми теорії ймовірностей, їх економічна інтерпретація.....	50
2.3. Схема незалежних випробувань.....	53
2.4. Випадкові величини та їх економічна інтерпретація.....	55
2.5. Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин.....	58
2.6. Багатовимірні випадкові величини.....	65
2.7. Функції випадкового аргументу. ....	69
2.8. Граничні теореми теорії ймовірностей.....	71
2.9. Елементи теорії випадкових процесів і теорії масового обслуговування..	74

2.10.	Первинне опрацювання статистичних даних.....	77
2.11.	Статистичне та інтервальне оцінювання параметрів розподілу.....	82
2.12.	Перевірка статистичних гіпотез.....	87
2.13.	Елементи теорії регресії.....	91
2.14.	Елементи дисперсійного аналізу.....	94
	<b>Література</b> .....	97
	<b>Додаток А.</b> Контрольні запитання на проміжні модульні контролі (ПМК).....	98
	<b>Додаток В.</b> Індивідуальні навчально-дослідні завдання.....	102

**«Математику уже для того необхідно  
вчити, що вона розум в порядок  
приводить» М.Ломоносов**

## **В С Т У П**

Сучасна економічна теорія, як на мікро-, так і на макрорівні включає як необхідний елемент математичні моделі і методи.

Використання математики в економіці дозволяє не тільки виділити і формально описати найбільш важливі зв'язки економічних параметрів і об'єктів, а й точно викласти положення економічної теорії, сформулювати її поняття і висновки.

Любе економічне дослідження завжди передбачає об'єднання теорії (економічної моделі) і практики (статистичних даних). Ми використовуємо теоретичні моделі для опису і пояснення суспільно-економічних процесів і збираємо статистичні дані з метою емпіричної побудови і обґрунтування цих моделей.

Економічні моделі дозволяють виділити особливості функціонування економічного об'єкта і на основі цього передбачити (спрогнозувати) майбутню поведінку об'єкта при зміні яких-небудь параметрів. Для любого економічного суб'єкта можливість прогнозувати ситуацію означає, насамперед, отримання найкращих результатів при мінімумі втрат, в тому числі, і в державній економічній політиці.

Будуючи модель, економісти виявляють найбільш вагомі фактори, які визначають досліджуване явище і відкидають деталі, несуттєві для вирішення поставленої задачі, які, однак, при цьому впливають на досліджуване явище.

Величина результуючої дії цих неврахованих факторів визначається випадковими факторами і є випадковою функцією. Це приводить до того, що взаємозв'язок між параметрами економічної моделі перестає бути детермінованим і набуває стохастичного характеру, що і має місце в реальній ситуації. Однак, Природа влаштована так, що сукупна дія великої кількості випадкових факторів втрачає випадковий, а набуває закономірний характер, тобто приводить до появи

так званих статистичних закономірностей (закон великих чисел). Вивченням таких закономірностей, властивих випадковим процесам, займається строга наука, що розвивається на потребу практики, - теорія ймовірностей та математична статистика. А теоретичною основою для цієї науки (як і для багатьох інших) є вища математика.

В першій частині посібника розглянуто чотирнадцять тем з вищої математики, які за програмою є обов'язковими для студентів економічних спеціальностей.

По кожній з тем надано короткий теоретичний курс, який покликаний звернути увагу читача на основні, найголовніші моменти того чи іншого розділу. Математичний матеріал пов'язується з різноманітними економічними реаліями, тобто вказуються основні економічні проблеми, які можуть бути розв'язані за допомогою того чи іншого математичного апарату. Кожен з розділів містить приклади розв'язування типових задач, як математичного так і суто економічного характеру. Надано, також, методичні поради щодо вивчення кожної з тем.

Друга частина посібника "Вища математика для економістів" присвячена не менш важливому для економістів розділу — "Теорія ймовірності та математична статистика". Метою даної частини є освоєння понять "ймовірності появи події" та "ймовірності появи випадкової величини", які є основою для аналізу економічних процесів. Розглянута методика розрахунку ймовірностей, в залежності від конкретно поставленого завдання, а також такого важливого економічного поняття, як статистичне спостереження.

В цілому, в даному посібнику висвітлюються відомі речі, ґрунтовно викладені в різних підручниках. Однак, автор сподівається, що узагальнене (наскільки це можливо) і конкретизоване тлумачення основних положень вищої математики та теорії ймовірності буде цікавим і корисним для тих, хто вивчає економіку і стикається з статистичними та економічними моделями в економіці.



## МОДУЛЬ 1. ВИЩА МАТЕМАТИКА

### 1.1. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Часто в реальному світі деякі величини, в тому числі і економічні, неможливо охарактеризувати одним єдиним числом (скалярною величиною). Прикладом може бути виготовлення одиниці певної продукції з використанням кількох видів сировини, причому виражатися дана сировина може в різних одиницях (кг, м<sup>2</sup> тощо). Необхідність вирішення такої проблеми обумовила застосування деякої іншої характеристики, відмінної від скаляра, яка б змогла чітко описати такі багатofакторні залежності. Такою величиною є вектор.

#### Базові терміни та поняття

**Означення:** **Вектором** називається напрямлений відрізок  $\vec{a}$  ( $\overline{AB}$ ) з початком у точці  $A$  та кінцем в точці  $B$ , який характеризується певною впорядкованою чи неупорядкованою кількістю величин.

Кількість таких величин, що утворюють вектор, характеризує його вимірність, а самі величини називаються *компонентами (координатами) вектора*. Записують вектор у вигляді стовпчика, який залежно від вимірності має такий вигляд:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad \vec{c} = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n).$$

Для векторів, як і для скалярних величин, характерні деякі арифметичні операції, такі як: додавання, віднімання, множення вектора на число та скалярний добуток векторів.

Для простоти, розглянемо *додавання та віднімання векторів* на прикладі двовимірного вектора, оскільки отримане правило є справедливим для векторів будь-якої розмірності. Нехай задано два вектори:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді сумою та різницею двох даних векторів буде:  $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$  і  $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$ .



З наведеного правила додавання та віднімання векторів випливає той факт, що дані операції можна проводити тільки над векторами однакової розмірності. Наприклад, додати два вектори  $\vec{a}=(1 \ 7)$  і  $\vec{b}=(5 \ 4 \ 1)$  — **неможливо**. Операція *множення вектора на скаляр* теж є елементарною і здійснюється за таким правилом: *при множенні вектора на число, дане число множиться на кожен з його компонент*.

Роль множення векторів відіграє так званий *скалярний добуток векторів* характерною особливістю якого є те, що на відміну від попередніх операцій, його результатом є не вектор, а *число*.

**Означення:** *Скалярним добутком двох векторів*

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ та } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

*називається число, яке обчислюється за формулою:*

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Очевидно, що операція скалярного добутку властива лише векторам однакової розмірності.

Часто на практиці доводиться визначати довжину вектора та кут між векторами. Ці величини можна знайти за такими формулами:

- *довжина вектора* —  $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ , де  $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$  (1.1.1)

- *кут між двома векторами* —  $\text{Cos} \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ . (1.1.2)

Теорія векторів має своє широке застосування в аналітичній геометрії — науці, що вивчає геометричні властивості різноманітних фігур. Так, знаючи координати двох точок на площині  $M(x_1, y_1)$  і  $N(x_2, y_2)$ , можна знайти довжину відрізка, який їх сполучає:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.1.3)$$

Формула (1.1.3), яка є не що інше, як обчислення довжини вектора  $\overline{MN}$ , є справедливою для вектора будь-якої розмірності [1; с.154].

Насамкінець розглянемо такий елемент двомірного простору як *пряма*. В загальному випадку її рівняння має вигляд:

$$ax + by = c, \quad (1.1.4)$$

де числа  $a$  та  $b$  є координатами вектора-нормалі  $\vec{n}(a, b)$  (нормаль — це вектор, перпендикулярний прямій). Якщо ж виразити пряму через її кутовий коефіцієнт, то рівняння (1.1.4) набуде наступного вигляду:

$$y = kx + b, \quad (1.1.5)$$

де  $k = \operatorname{tg} \alpha$  — кут між прямою та додатнім напрямом осі ОХ. Рівняння (1.1.5) випливає безпосередньо із загального рівняння прямої [2; с.155]. Варто сказати, що для знаходження рівняння будь-якої прямої, достатньо знати лише координати двох точок, через які вона проходить або координати однієї точки та кутовий коефіцієнт  $k$ .

Іноколи важливим є не аналітичний вигляд рівнянь прямих, а їх взаємне розташування. Виділяють три види розміщення прямих:

- прямі  $y = k_1x + b_1$  та  $y = k_2x + b_2$  перпендикулярні між собою. Умовою є наступна рівність:  $k_1 \cdot k_2 = -1$ , де  $k_1, k_2$  — їх відповідні кутові коефіцієнти.
- прямі  $a_1x + b_1y + c = 0$  та  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  паралельні (умова:  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ).
- прямі мимобіжні, якщо не виконується жодна з двох вищевказаних умов.

### **Методичні поради для вивчення теми**

Вектор — це своєрідний опис того чи іншого об'єкта з використанням чисел. Наприклад, прогноз погоди характеризується температурою повітря, вологістю повітря та тиском. Тому прогноз погоди може бути записаний за допомогою вектора так:  $\vec{a} = (20, 85, 740)$ . Проте, для того щоб чітко зрозуміти ідею теорії векторів, необхідно розглянути її математичне підґрунття. З точки зору математики, для того щоб отримати координати вектора, потрібно знати координати її початкової та кінцевої точки. При виконанні операцій над векторами, необхідно щоб вони були однакової розмірності, і, що дуже важливо, на практиці компоненти, що додаються чи множаться, повинні мати однаковий зміст (додавати

два вектори, один з яких характеризує погоду, а інший — витрати сировини на одиницю продукції є некоректним).

Що стосується вивчення елементів аналітичної геометрії, то слід розуміти, що пряма — це перш за все візуальне представлення того чи іншого процесу, а вже потім його математичний зміст. Рівняння прямої — це формула, яку задовольняють координати усіх точок, через які вона проходить. При дослідженні взаємного розташування прямих важливим є правильний вибір рівняння для застосування потрібних умов.

## **1.2. Елементи теорії матриць та визначників**

*Розділ "Матрична алгебра", є дуже цікавим, і, що головне, корисним для економічної практики в плані компактності подання вхідної і вихідної інформації. Особливо це стосується тих економічних досліджень, які передбачають велику кількість досліджуваних об'єктів і процесів. Подання інформації в матричній формі значно спрощує самі обчислення, що виникають в ході досліджень.*

### **Базові поняття та терміни**

**Означення:** Множина чисел  $a_{ij}$ , записаних у вигляді прямокутної таблиці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається **матрицею**.

Всі елементи матриці мають подвійну індексацію: перше число вказує рядок матриці, в якому знаходиться елемент, друге — стовпчик. Кількість рядків та стовпчиків визначає **розмір матриці**.

Серед всіх можливих матриць виділяють три головних типи:

- квадратна матриця — матриця, яка має однакову кількість рядків та стовпчиків;
- діагональна матриця — матриця, всі елементи якої, крім діагональних, рівні нулю;

- транспонована матриця — матриця, в якій стовпчики і рядки міняються місцями.

Крім цих трьох типів матриць існують і інші [1; с. 65-66].

Над матрицями можна проводити кілька елементарних арифметичних операцій, таких як: додавання, віднімання, множення матриці на число та множення матриць. Перші три операції здійснюються аналогічно до відповідних операцій над векторами, тобто при додаванні і відніманні матриць додаються і віднімаються їх відповідні елементи; при множенні матриці на число — це число множиться на кожен елемент матриці. Зупинимось детальніше на операції множення матриць.

**Означення:** Добутком двох матриць  $A$  і  $B$  називається така матриця  $C$ , елементи якої визначаються за формулою:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (1.2.1)$$

Для більшого розуміння даної формули, розв'яжемо наступний приклад.

- **Приклад.** Перемножити матриці  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  та  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ .

Знайдемо добуток  $A \cdot B$ , використовуючи формулу (1.2.1):

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \quad c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}.$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} \quad c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}.$$

Отримаємо результат:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

З даного прикладу випливає висновок: *перемножити можна тільки ті матриці, в яких кількість стовпчиків першої є рівною кількості рядків другої.*

Наприклад, матриці  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$  і  $B = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$  перемножити **неможливо**.

Слід також зауважити, що для множення матриць не виконується властивість комутативності, тобто

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Будь-якій квадратній матриці завжди можна поставити у відповідність деяке число, обчислене за певним правилом. Таке число називають **визначником матриці**. Найпростішим визначником матриці є будь-який з її елементів (його ще називають визначником 1-го порядку).

**Означення:** *Визначником 2-го порядку матриці  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  називається*

*число виду  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ , яке обчислюється за наступним правилом:*

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Наприклад,  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -10$ .

**Означення:** *Визначником 3-го порядку матриці  $A$  називається число, яке обчислюється за наступним правилом:*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Наприклад,  $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 6 \cdot 1 = 83 - 53 = 30$ .

Для визначників 4-го порядку і більше конкретного правила не існує. Обчислення таких визначників проводиться двома способами: зведенням їх до визначників 2-го чи третього порядку (використовуючи властивості визначників [2; с. 83-84], або за теоремою Лапласа [2; с. 85-89]).

**Означення:** *Мінором  $k$ -го порядку матриці  $A$  називається визначник, який утворений перетином будь-яких  $k$  рядків та  $k$  стовпчиків цієї матриці.*

Наприклад, для матриці  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , одним з мінорів 2-го порядку буде

визначник, що лежить на перетині двох перших рядків матриці та двох перших стовпчиків, а саме  $M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ . Якщо взяти останні два рядки та останні два

стовпчики матриці  $A$ , то отримаємо ще один мінор 2-го порядку.

**Означення:** Алгебраїчним доповненням  $A_{ij}$  до елемента  $a_{ij}$  матриці  $A$  називається мінор  $M_{ij}$ , який складається з елементів, що залишаються після закреслення стовця  $i$  рядка матриці  $A$ , що містять елемент  $a_{ij}$ , помножений на  $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Для матриці  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , алгебраїчним доповненням до елемента  $a_{11}$

буде  $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ . Зрозуміло, що **кількість алгебраїчних доповнень рівна**

**кількості елементів матриці.**

Поняття визначника є дуже важливим при визначенні обернених матриць.

**Означення:** Матриця  $A^{-1}$  називається **оберненою матрицею** до матриці  $A$ , якщо виконується рівність:  $A \cdot A^{-1} = E$ , де  $E$  — одинична матриця.

Обернена матриця існує тільки для квадратних матриць, в яких визначник не дорівнює нулю. Необхідність цієї умови впливає безпосередньо з формули обчислення обернених матриць.

*Алгоритм обчислення оберненої матриці:*

- обчислюємо визначник матриці  $|A|$ ;
- знаходимо всі алгебраїчні доповнення  $A_{ij}$  до елементів матриці  $A$ ;
- будуємо із знайдених алгебраїчних доповнень матрицю  $B$  і транспонуємо її, отримуючи матрицю  $B^T$ .
- застосовуємо формулу:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot B^T$ .

Отримана матриця  $A^{-1}$  буде оберненою до вихідної матриці  $A$  [2; с. 96-98].

### **Методичні поради для вивчення теми**

Оскільки вивчення даного розділу потребує багато числових обчислень, то для правильного засвоєння матеріалу необхідно чітко вивчити правила, за якими ці обчислення здійснюються. При множенні матриць необхідно завжди перевіряти

можливість здійснення даної операції. Множення рядка на стовпчик означає суму добутків їх відповідних елементів. Що стосується визначників 2-го та 3-го порядків, слід запам'ятати правила їх обчислень, оскільки вони є ключовими при обчисленні визначників вищих порядків. Для того, щоб звести визначник вищого порядку до визначника принаймні 3-го порядку необхідно застосувати властивості визначників та теорему Лапласа, яка якраз і передбачає можливість такого розкладу. Слід запам'ятати, що визначник є числом, а отже, все що подається у вигляді визначників (мінори та алгебраїчні доповнення) теж є числовими величинами.

При обчисленні оберненої матриці спочатку необхідно перевірити можливість її існування, тобто необхідні умови. Якщо обернена матриця існує, то виконавши всі кроки, описані в теоретичній частині, обов'язково одержимо правильний результат. Поняття транспонованої матриці є простим і полягає у заміні рядків стовпчиками.

### ***1.3. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь***

*В більшості випадків для опису більш-менш складного процесу, в тому числі і економічного, недостатньо тільки однієї функціональної залежності. Такі ситуації можна описати, якщо розглядати цілі системи функціональних залежностей, тобто сукупності рівнянь, які є взаємозв'язаними між собою (це зумовлене тим, що кожне із залежностей описує один і той же процес). Наявність зв'язку між рівняннями вимагає пошуку такого розв'язку, який задовольняв би кожне з них, тобто перетворював би їх у тотожності. Даний розділ присвячений ознайомленню із системами лінійних рівнянь та найпоширенішими методами їх розв'язання.*

#### ***Базові поняття та терміни***

***Означення:*** Системою лінійних рівнянь називається сукупність





Наступним кроком є заміна першого стовпчика визначника  $\Delta$  на стовпчик

вільних членів (чисел, що стоять після знака «дорівнює») —  $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ , тобто

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -5 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 9 \end{vmatrix} = 135 + 40 - 12 - (-10 + 48 + 135) = 163 - 173 = -10.$$

Аналогічну процедуру робимо з другим та третім стовпчиками визначника  $\Delta$ :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & -4 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix} = -45 - 24 + 4 - (-20 + 4 - 54) = -65 + 70 = 5$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 5 & -5 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 30 + 24 - (30 + 20 - 6) = 59 - 44 = 5$$

Для отримання розв'язків залишилось застосувати згадувані на початку формули Крамера, а саме:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1.$$

Отже розв'язком даної системи лінійних рівнянь буде сукупність чисел:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -1.$$

Для того, щоб перевірити правильність результату, достатньо підставити отримані числа в систему та переконатись, чи перетворюють вони кожне рівняння на тотожність.

### Метод Гаусса

Дану систему можна розв'язати ще одним способом — методом Гаусса. Слід зауважити, що метод Гаусса застосовується для розв'язування будь-яких систем, незалежно від кількості рівнянь та невідомих, що їх утворюють.

Випишемо розширену матрицю системи, яка включає стовпець вільних членів.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -4 & 9 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

*Першим кроком* в методі Гаусса є перетворення в нулі всіх елементів першого стовпчика, крім елемента  $a_{11}$ . Враховуючи те, що в матриці допускається додавання та віднімання рядочків, помножених на будь-яке число, для того, щоб елемент  $a_{21} = -2$  перетворився в нуль, потрібно помножити всі елементи першого рядочка на число 2 і додати їх до другого рядка.

*На другому кроці* в нуль потрібно перетворити елемент  $a_{31} = 2$ . Для цього всі елементи першого рядка помножимо на -2 і додамо до елементів третього рядка. Таким чином, можна зробити наступний висновок: *для перетворення будь-якого елемента  $a_{ij}$  в нуль, необхідно елемент, за допомогою якого це перетворення здійснюється (а, отже і весь рядок в якому він знаходиться), помножити на число протилежне до елемента  $a_{ij}$ .*

Кінцевим результатом таких перетворень повинно стати наявність в одному із рядків матриці двох нулів. Бачимо, що другий рядок матриці містить два потрібні нулі, а тому на основі отриманих коефіцієнтів випишемо систему, яка буде відрізнятися від вихідної, проте є еквівалентною (рівносильною) їй:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_2 = 1 \\ 2x_2 + 5x_3 = -7 \end{cases}$$

Як бачимо, з другого рівняння нової системи легко знаходиться невідома  $x_2 = -1$ . Підставивши знайдене значення  $x_2$  в третє рівняння знайдемо  $x_3 = -1$ . Аналогічно, маючи значення  $x_2$  та  $x_3$  з першого рівняння отримуємо розв'язок  $x_1 = 2$ .

### ***Методичні поради для вивчення теми***

Застосовуючи описані методи для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь важливо чітко знати алгоритм їх застосування. В цьому плані метод Крамера є найпростішим, оскільки побудований виключно на обчисленні визначників. Хоча, як вже згадувалось, основним його недоліком є дуже вузьке коло застосування. Метод Гаусса трохи складніший для сприйняття, проте дозволяє розв'язати будь-яку систему лінійних рівнянь. Для його застосування

необхідно добре усвідомити саму ідею методу, тобто знати які елементи матриці системи "занулюються" та яким чином це "занулення" здійснюється. Після того, як за допомогою еквівалентних перетворень система зведеться до трикутної, застосувавши зворотній хід методу Гаусса (поступове підставляння знайдених значень невідомих з метою відшукування наступних), не виникає ніяких труднощів в знаходженні її розв'язків.

Варто згадати про метод, який не був описаний, проте теж має широке застосування, — метод Жордана-Гаусса або модифікований метод Гаусса [1; с.124-127]. Модифікація полягає в тому, що "занулюються" елементи матриці системи не тільки під головною діагоналлю (як у Гаусса), а й над нею (методика "занулення" ідентична тій, що в методі Гаусса). Ця відмінність дозволить уникнути застосування зворотного ходу і побачити розв'язки безпосередньо в самій матриці. При розв'язуванні систем лінійних рівнянь, крім знання алгоритму вищеописаних методів, не менш важливим є правильний вибір найбільш оптимального з них. Правильний вибір методу може набагато швидше привести до бажаного результату.

#### ***1.4. Елементи матричного аналізу***

*Оскільки громіздкі економічні дані доцільно подавати у вигляді таблиці чисел, тобто матриці, що значно спрощує аналіз та розуміння процесу, то виникає логічне запитання: чи можливо, застосувавши матриці та їх властивості, розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь? Відповіддю на це питання є, так званий, матричний метод розв'язування систем рівнянь, або, як його ще називають, — метод оберненої матриці. Застосування цього методу є дуже простим і цікавим, а для деяких систем є оптимальним варіантом.*

#### ***Базові поняття та терміни***

Наведемо короткий алгоритм застосування матричного методу розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь на прикладі системи з трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Дана система записана в алгебраїчній формі, проте, якщо ввести позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

то її можна переписати наступним чином:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}. \quad (1.4.1)$$

Даний спосіб запису системи, називається *векторно-матричною формою системи лінійних рівнянь*. Знайдемо до матриці  $A$  обернену —  $A^{-1}$ . Помножимо ліву і праву частини рівності (1.4.1) на  $A^{-1}$  зліва (слід пам'ятати, що множення матриць не є комутативним)

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}.$$

Легко побачити, що оскільки  $A^{-1}$  є оберненою до  $A$ , то  $A^{-1} \cdot A = E$  (одинична матриця), а тому останнє рівняння переписеться так:

$$E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}.$$

Для знаходження розв'язків достатньо перемножити матрицю  $A^{-1}$  на стовпець  $\vec{b}$ .

**Твердження:** Матричний метод застосовується для розв'язування тільки квадратних систем рівнянь, визначник матриці яких не дорівнює нулю.

Очевидно, що дані обмеження вводяться для забезпечення існування оберненої матриці  $A^{-1}$  для матриці системи  $A$ .

### **Методичні поради для вивчення теми**

Зрозуміло, що дана методика розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь є доцільною тільки для тих систем, в яких основна матриця має порядок не більший за четвертий, оскільки у інших випадках процес відшукування оберненої матриці  $A^{-1}$  значно ускладнюється в плані технічному, що відчутно гальмуватиме сам процес розв'язання. Слід, однак, відмітити, що з допомогою програми Excel на комп'ютері можна знайти обернену матрицю довільного порядку. Проте, в цілому, метод є надзвичайно простим і для його правильного засвоєння достатньо лише

знати методику відшукування обернених матриць та вміти правильно матриці перемножати.

### **1.5. Елементи теорії границь**

*Дуже важливу роль в економічних дослідженнях відіграє поняття функції. Це пояснюється тим, що, якщо деякий економічний процес представити у вигляді функції (функція, як відомо, являє собою залежність однієї величини від іншої), то це дає змогу провести потрібний аналіз економічного явища математичними методами та зробити важливі висновки на основі її дослідження.*

*Що стосується граничного аналізу, то його застосування дає змогу дослідити граничні значення економічних величин, що є важливим моментом при різноманітних економічних прогнозах. Таким чином, переходячи до застосування функціонального та граничного тлумачення економічних процесів, спочатку розглянемо економіку крізь призму "чистої математики" зі всіма її перевагами.*

### **Базові поняття та терміни**

**Означення:** Якщо кожному натуральному числу  $n=1,2,3,\dots$  поставити у відповідність за певним законом числа  $a_n$ , то говорять, що задана **числова послідовність**

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Вираз "поставити у відповідність за певним правилом" означає, що повинна бути задана певна формула, за якою обчислюються члени числової послідовності  $\{a_n\}$ . Наприклад, якщо послідовність задана так —  $\{a_n\} = \frac{1}{n}$ , то, послідовно підставляючи вираз  $\frac{1}{n}$  значення  $n=1,2,3,\dots$ , отримаємо всі її члени:

$$\{a_n\} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Формула за якою знаходяться всі члени числової послідовності називається *загальним членом* і позначається  $a_n$ . Для даного прикладу, роль загального члена

відіграє вираз

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Поняття скінченних, нескінченних, обмежених, необмежених, зростаючих та спадаючих послідовностей розкриваються елементарно, виходячи із самих назв [1; с. 170-171].

Оскільки у формулі послідовності п нескінченну кількість значень  $n$  ( $n=1,2,3,\dots$ ), то це означає, що послідовність матиме нескінченну кількість членів. Тоді виникає питання: чи існує таке число, до якого прямуватимуть всі члени послідовності, але ніколи його не "перестрибнуть"? Саме для вирішення цього питання і вводиться поняття границі.

**Означення:** Число  $a$  називається **границею послідовності**  $\{a_n\}$ , якщо для довільного, як завгодно малого числа  $\varepsilon > 0$ , знайдеться такий порядковий номер члена  $N$ , що для всіх членів послідовності з індексами  $n > N$  виконується нерівність

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Те що число  $a$  є границею послідовності  $\{a_n\}$  записують так

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Послідовність, що має границю, називається **збіжною**.

Для більшого розуміння поняття границі, розглянемо його на прикладі вже відомої нам послідовності  $\{a_n\} = \frac{1}{n}$ . Її члени матимуть наступний вигляд

$$\{a_n\} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Видно, що при подальшій підстановці натуральних чисел, знаменник кожного наступного члена буде збільшуватись, а сам дріб, зрозуміло — зменшуватись. Таким чином, всі члени цієї послідовності, які є дробами, прямують до числа "нуль", яке є граничним для всіх чисел вигляду  $\frac{1}{n}$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

**Означення:** Якщо задане певне правило, за яким кожному значенню незалежної змінної  $x$  ставиться у відповідність єдине значення  $y$ , то говорять, що задано **функцію**, і записують  $y = f(x)$ .

Основною відмінністю між числовими послідовностями та функціями є те, що у випадку числової послідовності, роль аргументів відіграють числа  $n$ , які

належать множині натуральних чисел. Для функції роль аргументу відіграє  $x$ , який набуває своїх значень з множини дійсних чисел.

**Означення:** Число  $A$  називається **границею функції**  $f(x)$  у точці  $x = x_0$ , якщо для довільної послідовності аргументів  $\{x_n\}$ , яка збігається до точки  $x_0$ , відповідна послідовність значень функції  $\{f_n\}$  буде збігатися до числа  $A$ .

Те, що функція  $f(x)$  має границею число  $A$ , позначається так

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

■ **Приклад.** Знайдемо границю функції  $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$ , в точці  $x_0 = 1$ .

Оскільки послідовність аргументів збігається до точки  $x_0 = 1$ , то границею функції  $f(x)$  в цій точці буде значення цієї функції в точці  $x_0 = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{1^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1.$$

Отже, границею функції  $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$  в точці  $x_0 = 1$  є число 1.

### **Методичні поради для вивчення теми**

При обчисленні границь функцій необхідно, перш за все, звернути увагу на те, до якого значення прямують її аргументи. Якщо дане значення  $x_0$  є числовим, то, як видно з наведеного прикладу, границя шукається надзвичайно просто — вона буде рівною значенню функції в точці  $x_0$ . У випадку, коли послідовність аргументів прямує до безмежності чи до значення, в якому дана функція не існує (наприклад, якщо при підстановці значення  $x_0$  у функцію, що знаходиться під знаком границі, її знаменник перетворюється в нуль), обчислення границі функції вже не буде таким очевидним і зведеться до застосування інших аналітичних методів. В таких випадках доцільним буде використання властивостей границь та функцій [1; с. 184-185]. Варто також пам'ятати, що не кожна функція має границю, а якщо й має то вона не завжди є скінченною, тобто рівною конкретному числовому значенню. Тому перед обчисленням границі доцільно перевірити її існування.

## 1.6. Диференціальне числення функції однієї змінної

Диференціальне числення — це фактично один із найбільш вживаних та найбільш важливих розділів вищої математики для практичної економіки, оскільки поняття похідної функції має широке застосування при різноманітних дослідженнях граничних ефектів, особливо, в підприємницькій діяльності. За допомогою похідних в економічній практиці досліджуються та вирішуються важливі питання, що стосуються додаткових витрат та збільшення прибутку підприємства. Особливо зручним є застосування похідної при дослідженнях поведінки цільових функцій доходу чи витрат, що дає змогу спрогнозувати їх поведінку та уникнути непередбачуваних обставин.

### Базові поняття та терміни

Розглянемо деяку довільну функцію  $y = f(x)$  в двох точках  $x_0$  та  $x_1$ , де  $x_1 = x_0 + \Delta x$ . Величина  $\Delta x$  називається *приростом аргументу* функції, причому вона може бути як від'ємною ( $\Delta x < 0$ ), так і додатною ( $\Delta x > 0$ ). Дана функція в точках  $x_0$  та  $x_1$  набуває певних значень, а саме  $f(x_0)$  та  $f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$ . Різниця цих значень  $f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$  називається **приростом функції**.

**Означення:** Границя відношення приросту функції  $\Delta y$  до приросту аргументу  $\Delta x$  в точці  $x_0$ , за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називається **похідною функції в точці  $x_0$** , і позначається

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y'(x_0).$$

Той факт, що функція  $y = f(x)$  має похідну в точці  $x_0$  позначається  $f'(x_0)$ . Якщо функція  $f(x)$  має похідну в кожній точці деякого інтервалу  $(a, b)$ , то говорять, що вона є *диференційованою* на цьому інтервалі.

Існує кілька виведених похідних елементарних функцій [1; с. 203], які є відомими. Зупинимось на основних правилах диференціювання, зокрема, на випадках, коли функція має вигляд добутку та частки двох елементарних функцій.

### Похідна від добутку



Нехай функція  $y(x) = f(x) \cdot g(x)$ . Тоді для того, щоб знайти похідну функції  $y(x)$  необхідно застосувати наступну формулу

$$y'(x) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \quad (1.6.1)$$

Наприклад, знайдемо похідну функції  $y(x) = x \cdot \sin(x)$ . Оскільки  $y(x)$  подана у вигляді добутку двох функцій, то ми можемо скористатися формулою (1.6.1):

$$y'(x) = x' \cdot \sin(x) + x \cdot (\sin(x))' = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

### Похідна від частки

Нехай функція  $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ . В такому випадку для відшукування похідної слід використати наступну формулу:

$$y'(x) = \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} \quad (1.6.2)$$

Для прикладу знайдемо похідну функції  $y(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2}$ . Оскільки функція подана у вигляді частки, застосовуємо формулу (1.6.2):

$$y'(x) = \frac{(x^2 + 1)' \cdot (x^3 - 2) - (x^2 + 1) \cdot (x^3 - 2)'}{(x^3 - 2)^2} = \frac{2x \cdot (x^3 - 2) - (x^2 + 1) \cdot 3x^2}{(x^3 - 2)^2}.$$

Таким чином, бачимо, що похідна — це також функція аргументу  $x$ . Для того, щоб отримати значення похідної в деякій конкретній точці  $x_0$  необхідно просто підставити значення цієї точки у знайдений вираз похідної. В результаті отримаємо число. Тому варто запам'ятати: *похідна функції однієї змінної також є функцією того ж аргументу, а похідна функції в деякій точці — це число.*

Похідна, яка описувалась вище, називається *похідною першого порядку*, оскільки береться вона безпосередньо від вихідної функції. Існують, також, похідні функції вищих порядків, тобто другого, третього, четвертого і т.д. Похідною 2-го порядку від функції  $y(x)$ , буде похідна, взята від похідної 1-го порядку  $y'(x)$ ; похідна 3-го порядку — похідна від похідної 2-го порядку  $y''(x)$  і т.д.

■ **Приклад.** Знайдемо всі похідні функції  $y(x) = 2x^2 + 3x + 4$ . Отже:

$$y'(x) = (2x^2 + 3x + 4)' = 4x + 3$$

$$y''(x) = (y'(x))' = (4x + 3)' = 4$$

$$y'''(x) = (y''(x))' = (4)' = 0$$

Видно, що дана функція має тільки три похідні, оскільки всі решта (починаючи з похідної 4-го порядку) будуть рівними нулю. Висновок: *існують функції, кількість похідних яких є скінченною.*

Важливим поняттям в диференціальному численні є, також, поняття диференціалу функції, про який не можна не згадати, оскільки він буде широко застосовуватись в наступних розділах.

Нехай приріст незалежної змінної  $x$  рівний  $\Delta x \rightarrow 0$ . Введемо позначення  $\Delta x = dx$ . Тоді вираз  $f'(x)dx$  називається *диференціалом функції*  $y = f(x)$  і позначають символом  $dy$ . Зокрема,  $dx$  буде *диференціалом аргументу*  $x$ .

З наведених міркувань випливає очевидна рівність:

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad (1.6.3)$$

Ми отримали ще одне тлумачення похідної: *похідна є відношення диференціалів.*

■ **Приклад.** Знайти диференціал функції

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 3.$$

Застосувавши формулу (1.6.3) отримуємо:

$$df = (3x^2 - 5x + 3)' dx = (6x - 5)dx$$

### **Методичні поради для вивчення теми**

Оскільки вже згадувалась важливість розділу "Диференціальне числення" для аналізу економіки, то до вивчення його математичних засад потрібно підійти дуже серйозно. Перш за все необхідно знати похідні всіх елементарних функцій, оскільки, якою б складною не була функція, похідну якої потрібно знайти, вона завжди зводиться до сукупності елементарних, похідні яких є виведеними і відомими. По-друге, потрібно знати правила диференціювання і вміти застосовувати їх в конкретних прикладах.

При вивченні даного матеріалу неминучою є зустріч з, так званими, складними функціями (наприклад,  $f(x)=(x+3)^2$  чи  $f(x)=\sin 2x$ ), основною особливістю яких є те, що роль їх аргументувідіграє інша функція. Присутність функції як аргументу іншої функції дещо змінює правило диференціювання, хоча в цілому похідна від складних функцій береться аналогічно правилу диференціювання звичайних функцій [1; с. 203].

### **1.7. Граничний (маргінальний) аналіз**

Даний розділ повністю присвячений вивченню ролі диференціального числення в економічному аналізі. Як вже говорилося раніше, в економіці найбільш важливими є граничні величини (найбільший дохід, найменші витрати) і можливість їх прогнозування. Для таких досліджень і використовується диференціальне числення, яке дає можливість спрогнозувати ту чи іншу економічну ситуацію, оцінити граничні ефекти, еластичність тощо.

#### **Базові поняття та терміни**

Розглянемо економічну інтерпретацію похідної на прикладі функції витрат. Нехай витрати виробництва  $C(x)$  є функцією, яка залежить від обсягу виробництва продукції  $x$ . Розглянемо приріст функції витрат  $\Delta C(x)$  і приріст незалежної змінної  $\Delta x$ . Тоді, вираз  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C(x)}{\Delta x}$  є не що інше, як похідна функції  $C(x)$ , а саму границю називають *граничними витратами виробництва*.

Щоб зрозуміти економічний зміст граничних витрат, розглянемо конкретний приклад. Нехай  $C(x)=1000x-0,1x^2$ . Запишемо похідну цієї функції витрат, використовуючи означення похідної:

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}. \quad (1.7.1)$$

Відомим є той факт, що при малих значеннях аргументу  $x$  виконується рівність

$$\frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x} \approx C'(x), \quad (1.7.2)$$

і, оскільки реальний економічний зміст мають тільки цілі значення  $x$  (кількість продукції не може бути дробовою величиною), то поклавши  $\Delta x = 1$  отримаємо:

$$C(x+1) - C(x) \approx C'(x).$$

Дана рівність чудово демонструє економічний зміст похідної: *похідна функції  $C'(x)$  показує, наскільки зміняться витрати підприємства, якщо воно почне виробляти на одну одиницю продукції більше.* Повернувшись до нашого прикладу, матимемо:

$$C'(x) = 1000 - 0,2x \Rightarrow C'(100) = 1000 - 20 = 980$$

Це означає, що якщо підприємство, умовно, збільшить виробництво продукції зі 100 одиниць до 101, витрати зростуть на 980 одиниць (наприклад, гривень). Така інтерпретація похідної дає змогу проводити ефективний аналіз для визначення оптимальних обсягів випуску продукції (аналогічним чином досліджується і граничний дохід підприємства).

Другим важливим поняттям в економічному аналізі є *еластичність функції*. Пов'язано це з тим, що в багатьох практичних економічних задачах, зручно обчислювати приріст залежної змінної відносно приросту незалежної змінної не в одиницях, а у відсотках.

Перед тим як перейти безпосередньо до означення еластичності, введемо необхідні позначення. Нехай задана функція  $y = f(x)$ . **Відносним приростом** залежної змінної (тобто самої функції) буде  $\frac{\Delta y}{y}$ , а відносним приростом незалежної змінної буде  $\frac{\Delta x}{x}$ .

Розглянемо відношення цих відносних приростів (дане відношення показує, у скільки разів відносний приріст функції більший за відносний приріст незалежної змінної), а саме:

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}.$$

Тоді, якщо існує похідна функції  $y = f(x)$ , то справедливою є наступна рівність

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right) = f'(x) \frac{x}{y}.$$

**Означення:** Границя відношення відносного приросту функції  $y = f(x)$  до відносного приросту незалежної змінної, при  $\Delta x \rightarrow 0$ , називається **еластичністю функції**  $y = f(x)$  **відносно змінної**  $x$ , і позначається

$$E_x(y) = f'(x) \frac{x}{y}.$$

Економічний зміст еластичності функції є дуже схожим з економічним тлумаченням граничного ефекту: *еластичність функції показує наскільки відсотків приблизно зміниться значення функції, якщо значення незалежної змінної зміниться на 1%.*

■ **Приклад.** Розрахувати еластичність функції  $y(x) = 2x + 7$ .

Використавши формулу еластичності, отримаємо наступний результат:

$$E_x(y) = (2x + 7)' \frac{x}{y} = 2 \cdot \frac{x}{2x + 7} = \frac{2x}{2x + 7}.$$

Якщо покласти  $x = 3$ , то еластичність функції буде рівною  $E_3(y) = \frac{6}{13}$ . Це означає, що якщо фіксоване значення незалежної змінної  $x = 3$  збільшити на 1% — значення функції зросте на  $\frac{6}{13}\%$ .

Найчастіше явище еластичності функції застосовується при прогнозуванні попиту, пропозиції та ціни товару. Як приклад, розглянемо еластичність попиту на товар відносно його ціни. Як правило, в практичній економіці важливим є дослідження не самого попиту, а його зміни відносно зміни ціни на товар. Якщо скористатися формулою еластичності функції і врахувати що  $q = f(p)$ , де  $q$  — попит, а  $p$  — ціна, то ми отримаємо наступну формулу обчислення еластичності попиту відносно ціни:

$$E_p(q) = \frac{p}{q} q'(p).$$

Варто зазначити, що здебільшого в реальному житті, збільшення ціни на продукцію, як правило, веде до зниження попиту на неї, а тому справедливою є нерівність  $q'(p) < 0$ , тобто функція попиту є функцією спадною.

Щоб уникнути від'ємних значень при вивченні попиту, на практиці прийнято використовувати наступну формулу еластичності попиту

$$E_p(q) = -\frac{p}{q} q'(p). \quad (1.7.3)$$

Розглянемо три випадки, які можуть виникнути при дослідженні зміни попиту відносно ціни:

- $E_p(q) > 1$ . Це означає, що в разі підвищення ціни на 1%, попит на дану продукцію знизиться більш ніж на 1%. Такий попит називають *еластичним*;
- $E_p(q) = 1$ . В даному випадку підвищення ціни продукції на 1% приведе до зниження попиту на 1%. Такий попит називається *нейтральним*;
- $E_p(q) < 1$ . Така ситуація говорить про зниження попиту менш ніж на 1% при збільшенні ціни на 1%. Такий попит називається *нееластичним*.

■ **Приклад.** Функція попиту має вигляд  $q = 12 - 7p$ . Розрахувати еластичність по попиту  $E_q(p)$ .

Знайдемо еластичність попиту використавши формулу (1.7.3):

$$E_p(q) = -\left(\frac{p}{12-7p} \cdot (12-7p)'\right) = -\left(\frac{-7p}{12-7p}\right) = \frac{7p}{12-7p}.$$

Якщо, наприклад, покласти ціну  $p = 2$ , то  $E_2(q) = -7$ , а це означає, що при ціні 2 грн. її підвищення на 1% приведе до зниження попиту на 7%.

### ***Методичні поради для вивчення теми***

Даний розділ є легким і доступним для сприйняття, оскільки поряд з математичними твердженнями фігурують реальні приклади їх економічного застосування. При дослідженні еластичності та граничних ефектів не стільки важливими є формули, за якими їх знаходять, як важливим є саме розуміння цих явищ з економічної точки зору. Потрібно усвідомлювати, яку користь можна одержати із застосування визначених економічних критеріїв і як використати отриманий результат для досягнення оптимального варіанту дій того чи іншого підприємства.

## ***1.8. Дослідження функцій та побудова графіків***

При аналізі та дослідженні поведінки функцій важливо мати не тільки її аналітичний вигляд, тобто функціональну залежність у вигляді формули, але й бачити її візуально — на графіку. В багатьох випадках це дає змогу більш простіше оцінити її властивості. Загалом, побудові графіка функції передують її детальне дослідження, яке базується на визначенні її критичних точок, області визначення, екстремальних точок, проміжків монотонності, проміжків знакосталості та багато іншого. Такий підхід до функціонального аналізу забезпечується засобами диференціального числення, яке є потужним апаратом для візуалізації економічних залежностей.

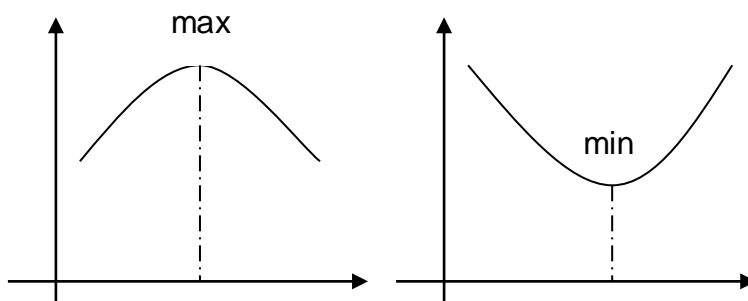
### Базові поняття та терміни

За допомогою похідної можна встановити проміжки монотонності функції.

Якщо функція  $f(x)$  є диференційованою на інтервалі  $(a,b)$  і на цьому інтервалі її похідна  $f'(x) > 0$ , то функція  $f(x)$  **монотонно зростає** на інтервалі  $(a,b)$ ; якщо ж похідна  $f'(x) < 0$  на інтервалі  $(a,b)$ , то функція  $f(x)$  є **монотонно спадною** на ньому. Очевидно, що зміна монотонності функції (перехід від спадання до зростання чи навпаки) можлива тільки в тих точках області визначення, в яких похідна рівна нулю

$$f'(x) = 0. \quad (1.8.1)$$

**Означення:** Точка  $x_0$  називається **екстремальною точкою** для функції  $f(x)$ , якщо вона надає функції найбільшого або найменшого значення.



Природно, що виникає питання: як же знайти ці точки? Відповідь на це питання дає наступне твердження.

**Твердження:** Якщо в точці  $x_0 \in (a,b)$  диференційована функція  $f(x)$  досягає екстремуму (мінімуму чи максимуму), то в ній виконується умова (1.8.1).

Іншими словами, функція  $f(x)$  може мати екстремум тільки в тих точках, в яких її перша похідна рівна нулю. Варто сказати, що умова  $f'(x)=0$  є тільки необхідною умовою існування екстремуму, оскільки існують функції, перша похідна яких в точці  $x_0$  рівна нулю, але цій точці екстремуму немає. Проілюструємо методику знаходження екстремальних точок на конкретному прикладі.

■ **Приклад.** Дослідити функцію  $f(x)=x^3 - x^2$  на екстремум.

Знайдемо першу похідну функції  $f(x)$ :

$$f'(x)=(x^3 - x^2)' = 3x^2 - 2x$$

Знайдемо всі точки, при яких перша похідна рівна нулю:

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ або } 3x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}.$$

Отже, маємо дві точки  $x_1 = 0$  та  $x_2 = \frac{2}{3}$ , в яких наша функція **може мати**

**екстремум.** Для перевірки характеру екстремальності даних точок, необхідно спочатку знайти другу похідну від функції  $f(x)$ :

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 2x)' = 6x - 2.$$

Обчислимо значення другої похідної у знайдених точках можливого екстремуму:

$$f''(x_1) = f''(0) = 6 \cdot 0 - 2 = -2$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 2$$

та застосуємо умови мінімуму та максимуму, які є достатніми умовами існування екстремуму функції в точці, а саме: *якщо в точці  $x_0$ , яка є підозрілою на екстремум, друга похідна функції  $f''(x_0) < 0$ , то в цій точці функція досягає максимуму; якщо ж  $f''(x_0) > 0$  — мінімуму.*

Очевидно, що для нашого прикладу точка  $x_1 = 0$  є точкою максимуму, а точка  $x_2 = \frac{2}{3}$  — мінімуму. Для того, щоб знайти максимальне та мінімальне значення функції, достатньо підставити отримані екстремальні точки у функцію  $f(x)$ .



Варто зазначити, що у випадку коли  $f''(x_0)=0$ , зробити якийсь висновок про характер екстремальності точки  $x_0$  не вдається, і для того щоб отримати якийсь результат необхідно провести додаткові дослідження [1; с. 213-217].

■ **Приклад.** Побудувати графік функції  $f(x)=2x^3 - 12x^2 + 18x$ .

Бачимо, що дана функція є многочленом, а многочлени, як відомо, областю визначення мають множину дійсних чисел. Те саме стосується і області значень. Знайдемо екстремальні точки даної функції.

$$f'(x)=6x^2 - 24x + 18$$

$$6x^2 - 24x + 18 = 0$$

$$6(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

З останнього квадратного рівняння знаходимо дві точки:  $x_1=1$ ,  $x_2=3$ .

Визначимо характер їхньої екстремальності:

$$f''(x)=12x - 24$$

$$f''(1)=-12$$

$$f''(3)=12$$

Отже, в точці  $x_1=1$  наша функція досягає максимуму, а в точці  $x_2=3$  — мінімуму. Знайдемо значення функції  $f(x)$  в цих точках:

$$f(1)=8$$

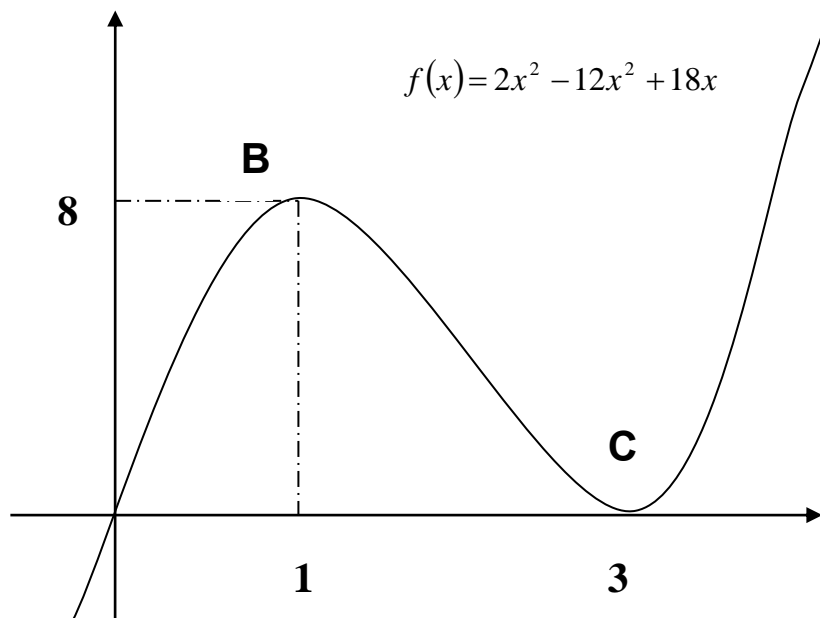
$$f(3)=0.$$

Таким чином, ми вже знаємо, що на проміжках  $(-\infty;1)$  та  $(3;+\infty)$  наша функція зростає, а на інтервалі  $(1;3)$  — спадає. Для більш точної побудови графіку, знайдемо точки перетину функції з осями координат:

$$\text{ОХ: } 2x^3 - 12x^2 + 18x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ та } x=3.$$

Вісь ОХ графік перетинає в точках  $(0,0)$  та  $(3,0)$  (остання точка є ще й екстремальною), а вісь ОУ — в точці  $(0,0)$ .

Тепер будуюмо графік функції:



Бачимо, що точки  $B(1;8)$  і  $C(3;0)$  — це точки екстремуму нашої функції. Таким чином, маючи крім аналітичного запису функції ще й її графічне зображення, можна зробити висновки про її поведінку та необхідні прогнози.

### **1.9. Основні поняття функції багатьох змінних та її інтерпретація в економічній теорії**

*В попередніх розділах ми розглядали функцію однієї змінної, тобто функцію, яка залежить від одного аргументу. Проте, як правило, переважна більшість економічних процесів описуються функціями, які залежать від кількох змінних (наприклад, виготовлення деякої продукції передбачає використання кількох видів сировини, робочої сили, транспорту та ін.) і тоді для їх аналізу потрібно підійти з іншого боку, який дозволив би врахувати всі фактори. В таких випадках застосовуються функції багатьох змінних, які утворюють окремий клас функцій, характерний своїми властивостями та особливостями. В цьому розділі розглянемо особливості застосування функцій багатьох змінних в економіці та, що дуже важливо, навчимося використовувати їх при описанні конкретних економічних ситуацій.*

#### **Базові поняття та терміни**

**Означення:** Якщо значенням  $x_1, x_2, \dots, x_n$  за певним законом ставиться у відповідність єдине значення  $y$ , то задано **функцію багатьох змінних**

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Змінні  $x_1, x_2, \dots, x_n$  називаються *аргументами функції*, а змінна  $y$  називається *функцією*. Сукупність всіх значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  при яких вираз  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  має зміст називається *областю визначення функції багатьох змінних (ФБЗ)*, а значення  $y$ , які набуває функція, утворюють *область її значень*.

Відомо, що функція однієї змінної геометрично відображається лінією, тобто описує двовимірні об'єкти. Графіком ФБЗ є поверхня, тобто просторовий об'єкт, вимірність якого залежить від кількості аргументів функції. Зрозуміло, що з практичної точки зору зобразити графічно можливо тільки функцію двох змінних

$$y = f(x_1, x_2),$$

оскільки це трьохвимірна поверхня. При наявності більшого числа аргументів функція переходить в простори більшої розмірності, уявити які практично неможливо (в силу трьохвимірності простору, в якому ми існуємо).

Розглянемо приклад економічної інтерпретації функції багатьох змінних.

Нехай підприємець виготовляє два види продукції, які ми умовно позначимо  $A$  та  $B$ . На виготовлення одиниці продукції кожного виду витрачається два види сировини в кількостях  $x_1$  та  $x_2$ . Ціна одиниці кожного виду сировини рівна  $p_1$  та  $p_2$  відповідно. Тоді функція витрат підприємця на виготовлення одиниці продукції кожного виду може мати, наприклад, такий вид:

$$G_A = 2x_1p_1 + 8x_2p_2 \text{ — функція витрат для } A,$$

$$G_B = -3x_1p_1 + 4x_2p_2 \text{ — функція витрат для } B.$$

### ***Методичні поради для вивчення теми***

Дана тема потребує чіткого розуміння природи функції багатьох змінних, тобто усвідомлення того, що вона залежить від кількох факторів (аргументів). Неврахування однієї із змінних може привести до неправильного тлумачення її властивостей. Варто сказати, що функція багатьох змінних є більш ефективною з точки зору економічного аналізу, оскільки сучасні складні процеси, в тому числі і економічні, практично неможливо правильно описати використовуючи лише один аргумент.

## **1.10. Диференційованість функції багатьох змінних**

Як вже зазначалось, більшість економічних процесів описуються функціями багатьох змінних, а тому для аналізу таких процесів вже не можна застосовувати всі прийоми та методи, які ми використовували при дослідженні функцій однієї змінної. Тому для вирішення цієї проблеми необхідно застосовувати більш загальний підхід, який би враховував всю багатофакторність ситуації. Оскільки важливу роль при дослідженні будь-яких функцій відіграють їх диференціальні властивості, то даний розділ буде повністю присвячений поняттю диференціювання функції багатьох змінних, яке істотно не відрізняється від аналогічного диференціювання функцій одного аргументу, проте має кілька принципових відмінностей.

### **Базові поняття та терміни**

Для розуміння поняття похідної функції багатьох змінних проілюструємо його на прикладі функції двох змінних. Нехай задана функція

$$y = f(x_1, x_2).$$

Якщо зафіксувати змінну  $x_2$  (вважати її сталою величиною), то ми фактично отримуємо функцію однієї змінної  $y = f(x_1)$ , диференціювання якої вже відоме. Таким чином, отримаємо

$$y'_{x_1} = f'(x_1).$$

Даний запис називається **частинною похідною 1-го порядку по змінній  $x_1$** . Аналогічним чином вводиться **частинна похідна 1-го порядку функції по змінній  $x_2$**  (в даному випадку фіксується змінна  $x_1$ ).

$$y'_{x_2} = f'(x_2).$$

Легко побачити, що частинних похідних 1-го порядку буде рівно стільки, скільки аргументів містить функція. Наприклад, знайдемо всі частинні похідні 1-го порядку функції двох змінних

$$z = x^3 + 2x^2 - xy + y^2.$$

Частинних похідних 1-го порядку задана функція буде мати дві:

$$z'_x = 3x^2 + 4x - y$$

$$z'_y = -x + 2y.$$

Як і у випадку функції однієї змінної, для функцій багатьох змінних теж вводиться поняття похідної вищих порядків. Частинні похідні 2-го порядку ФБЗ шукаються від частинних похідних 1-го порядку, аналогічно — 3-го порядку від 2-го і так далі. Для нашого прикладу частинні похідні 2-го порядку будуть рівні

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = 6x + 4, \quad z''_{yy} = (z'_y)'_y = 2.$$

Крім того, частинними похідними 2-го порядку будуть також похідні для різних аргументів, які називаються **мішаними похідними**. Правило їх розрахунку покажемо на нашому прикладі:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = -1, \quad z''_{yx} = (z'_y)'_x = -1.$$

Той факт, що дві мішані похідні виявились рівними між собою не є випадковістю, оскільки справедливим є наступне твердження:

**Твердження:** Якщо існують неперервні мішані похідні  $f''_{xy}$  та  $f''_{yx}$ , то вони рівні між собою.

Таким чином, для отримання всіх мішаних похідних функції двох змінних, достатньо знайти тільки одну з них (зрозуміло що для функції трьох і більше аргументів кількість мішаних похідних буде більшою). Всі описані правила відшукування частинних похідних функції двох змінних є справедливими і для функції залежних від  $n$  аргументів.

### **Методичні поради для вивчення теми**

При вивченні диференціювання ФБЗ, необхідно звернути увагу на те, як вона зводиться до функції однієї змінної. Зафіксувати одну із змінних означає, що при визначенні похідної дана змінна вважається сталим числом, і похідну від цієї змінної слід брати як від константи. Зрозуміло, що якщо ФБЗ залежить від  $n$  аргументів, то фіксувати необхідно  $(n-1)$  аргумент, для того щоб знайти всі частинні похідні. Підсумовуючи, можна зробити висновок: частинні похідні функції багатьох змінних є простими похідними від функції однієї змінної.

## **1.11. Екстремуми та умовні екстремуми**

## **функції багатьох змінних**

Диференціювання ФБЗ, тобто обчислення частинних похідних, є суттєвим елементом при її дослідженні, оскільки, як і у випадку функції однієї змінної, воно є базовим апаратом для знаходження екстремальних точок. Поняття екстремальної точки для функції з кількома аргументами є ідентичним за суттю в порівнянні з "одновимірними" функціями, проте має більш загальний характер.

Окрім звичайних екстремумів, для функцій багатьох змінних вводяться також умовні екстремуми. Таке нововведення зумовлене тим, що аргументи функції багатьох змінних в економічному тлумаченні виступають цілком реальними факторами (сировина, кількість продукції, ціна продукції та ін.), які в силу різних обставин підлягають певним обмеженням, нехтувати якими неможна.

### **Базові поняття та терміни**

#### **Безумовний екстремум.**

**Означення:** Функція  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  набуває екстремум в точці  $\lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , якщо в цій точці вона досягає свого найбільшого або найменшого значення.

Очевидно, що екстремальна точка буде виражатися не одним числом, а кількома координатами, кількість яких залежить від кількості аргументів функції. За аналогією з функцією однієї змінної, ФБЗ може мати екстремум тільки в тих точках, в яких частинні похідні 1-го порядку рівні нулю, тобто

$$\begin{aligned} y'_{x_1} \Big|_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)} &= 0 \\ y'_{x_2} \Big|_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)} &= 0 \\ \dots & \\ y'_{x_n} \Big|_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)} &= 0 \end{aligned} \tag{1.11.1}$$

Для відшукування таких точок, потрібно розв'язати систему рівнянь (1.11.1), кількість яких буде рівною кількості частинних похідних 1-го порядку. Якщо такі

точки знайдуться (їх може не бути тільки у випадку, коли система не матиме розв'язків), то наступним кроком є визначення характеру їх екстремальності. Для цього потрібно знайти всі частинні похідні 2-го порядку (включаючи мішані) та скласти, так звану, матрицю Гессе, яка виглядає наступним чином:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} y''_{x_1x_1} & y''_{x_2x_1} & \dots & y''_{x_nx_1} \\ y''_{x_1x_2} & y''_{x_2x_2} & \dots & y''_{x_nx_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y''_{x_1x_n} & y''_{x_2x_n} & \dots & y''_{x_nx_n} \end{pmatrix}.$$

Як видно, вона є квадратною матрицею, в якій по головній діагоналі знаходяться частинні похідні 2-го порядку, а решта - мішані похідні (причому, в силу рівності мішаних похідних, вона ще й симетрична). Виписавши всі головні мінори (тобто визначники, які знаходяться на головній діагоналі)

$$M_1 = y''_{x_1x_1}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} y''_{x_1x_1} & y''_{x_2x_1} \\ y''_{x_1x_2} & y''_{x_2x_2} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} y''_{x_2x_2} & y''_{x_2x_1} & y''_{x_3x_1} \\ y''_{x_1x_2} & y''_{x_2x_2} & y''_{x_3x_2} \\ y''_{x_1x_3} & y''_{x_2x_3} & y''_{x_3x_3} \end{vmatrix}, \dots$$

і порахувавши їх в точці  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , робимо висновок про характер екстремальності точки використовуючи такі умови: якщо  $M_1 > 0, M_2 > 0, M_3 > 0, \dots, M_n > 0$ , то в досліджуваній точці **мінімум**; якщо  $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, \dots, (-1)^n M_n > 0$  (тобто знаки чергуються), то в досліджуваній точці **максимум**. У всіх решта випадках точка **не є екстремальною**.

### Умовний екстремум.

Основною відмінністю умовного екстремуму від безумовного є те, що на аргументи функції накладаються додаткові обмеження у вигляді функцій

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{1.11.2}$$

Оскільки даними обмеженнями не можна знехтувати, на допомогу приходять так звана функція Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \cdot \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \cdot \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Тепер частинні похідні 1-го порядку потрібно шукати не від вихідної функції, а від побудованої функції Лагранжа. Прирівнявши всі отримані перші частинні похідні до нуля, і додавши до них рівняння-обмеження (1.11.2), отримаємо систему, розв'язки якої і будуть точками можливого екстремуму. Визначення характеру екстремальності таких точок проводиться за вже відомими нам умовами.

■ **Приклад.** Дослідити функцію  $z = 2x_1^2 + x_1 - x_2^2 + 2x_2 - 7$  на екстремум.

Знаходимо частинні похідні 1-го порядку

$$z'_{x_1} = 4x_1 + 1, \quad z'_{x_2} = -2x_2 + 2.$$

Прирівнявши їх до нуля та розв'язавши систему, знаходимо точку  $\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$ .

Частинні похідні 2-го порядку будуть рівними

$$z''_{x_1^2} = 4, \quad z''_{x_2^2} = -2, \quad z''_{x_1x_2} = z''_{x_2x_1} = 0,$$

а відповідна матриця Гессе

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо мінори:  $M_1 = 4$ ,  $M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -8$ . Отримані числові значення

мінорів не задовольняють ні умову мінімуму, ні умову максимуму, а отже функція в точці  $\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$  екстремуму немає.

### ***Методичні поради для вивчення теми***

Як і у випадку функції однієї змінної, для правильного засвоєння теми необхідно чітко розуміти алгоритм дослідження функції багатьох змінних на екстремум. Пошук точок екстремумів можливий тільки при розв'язанні системи рівнянь, складеної з частинних похідних 1-го порядку, а не кожного рівняння окремо. Ще одним дуже важливим нюансом є те, що знайдені другі частинні похідні можуть виявитись теж функціями багатьох змінних (у вищеописаному прикладі вони були рівні конкретним числам, що є випадком досить тривіальним), і тоді додатність чи від'ємність головних мінорів  $M_1, M_2, \dots, M_n$  матриці Гессе можна



визначати тільки підстановкою координат точки можливого екстремуму в дані мінори.

Що стосується методу визначення умовного екстремуму, то очевидно, що принципової відмінності він не містить. Вся ідея зводиться до побудови функції Лагранжа, та розв'язування системи, яка буде містити на кілька рівнянь більше, ніж при безумовному екстремумі. Зрозуміло, що в системі з'являться нові невідомі  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  - множники Лагранжа, які дуже легко з неї виключаються [1; с. 254-257].

### **1.12. Інтегральне числення**

В практичному аналізі трапляються випадки, коли відомою є похідна функції, а не сама функція. Тоді постає питання: як знайти функцію маючи її похідну? Відповідь на це запитання дає ще один дуже важливий розділ — "Інтегральне числення", який є своєрідним "прототипом" диференціальної теорії, оскільки "вихідним матеріалом" для нього служить вже не функція, а її похідна. Операція інтегрування є протилежною до диференціювання. Це також потужний апарат для використання в економічному аналізі, оскільки служить для обчислення сумарних економічних ефектів. Тобто за допомогою інтегралів, можна змодельовати економічну ситуацію, розглянувши її у більш загальному ракурсі.

#### **Базові поняття та терміни**

**Означення:** Функція  $F(x)$ , похідна якої рівна  $f(x)$ , називається **первісною** функції  $f(x)$ , тобто

$$F'(x) = f(x).$$

Нехай задана похідна  $f'(x) = 2$ . Очевидно, що первісною для неї буде функція  $f(x) = 2x$ , оскільки  $(2x)' = 2$ . З іншого боку, первісною може бути також функція  $f(x) = 2x + 2$  або  $f(x) = 2x - 2$ , оскільки похідна від будь-якої сталої дорівнює нулю. Тому справедливим є наступне твердження

**Твердження:** Якщо первісною функції  $f(x)$  є функція  $F(x)$ , то первісною буде також функція вигляду  $F(x) + C$ , де  $C = \text{const}$  (стала).

## **Невизначений інтеграл**

**Означення:** Запис  $\int f(x)dx$  називається **невизначеним інтегралом** функції  $f(x)$ , де  $f(x)dx$  — підінтегральний вираз, а  $C$  — стала інтегрування.

З означення випливає, що первісна буде шукатися за формулою

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

З означення невизначеного інтегралу випливають такі правила інтегрування:

1.  $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ , тобто *сталу можна виносити за знак інтеграла*.

2. *Інтеграл суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів*.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Варто сказати, що обчислення будь-якого інтегралу, зводиться до вже відомих інтегралів елементарних функцій. Таку таблицю інтегралів елементарних функцій можна знайти в будь-якому довіднику, тому зупинятися на цьому немає потреби. Більш важливим є методи інтегрування, які дозволяють здійснити перехід від складніших інтегралів до елементарних.

Якщо підінтегральна функція подана у вигляді добутку двох функцій  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ , то для інтегрування використовують наступну формулу

$$\int v(x)u'(x)dx = v(x)u(x) - \int u(x)v'(x)dx \quad (1.12.1)$$

яка називається **формулою інтегрування частинами**.

Проілюструємо її на прикладі. Знайдемо інтеграл  $\int xe^x dx$ . Підінтегральна функція подана у вигляді двох функцій  $v(x) = x$ ,  $u(x) = e^x$ , а тому ми можемо застосувати формулу (1.12.1)

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} v(x) = x \quad v'(x) = dx \\ u'(x) = e^x dx \quad u(x) = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Отже первісною функції  $f(x) = x \cdot e^x$  буде  $F(x) = e^x(x-1) + C$ . Для того, щоб перевірити правильність розв'язку, необхідно перевірити виконання рівності  $F'(x) = f(x)$ .

Досить часто інтеграл можна спростити, ввівши нову змінну. Цей спосіб є ефективним у випадку, коли функція  $f(x)$  є складною, тобто  $f(x) = f(g(x))$ . Тоді, якщо ввести заміну  $g(x) = t$ , справедливою є наступна формула

$$F(x) = \int f(g(x)) dx = \left\{ \begin{array}{l} dt = g'(x) dx \\ dx = \frac{dt}{g'(x)} \end{array} \right\} = \int f(t) dt. \quad (1.12.2)$$

Зрозуміло, що після обчислення інтегралу, потрібно зробити зворотню заміну, щоб повернутися до вихідної змінної. Формула (1.12.2) називається **формулою інтегрування підстановкою**.

Проілюструємо її на прикладі. Знайдемо інтеграл  $\int \frac{dx}{2x+5}$ . Очевидно що він не є елементарним, але якщо ввести заміни  $2x+5=t$  та  $\left\{ \begin{array}{l} dt = (2x+5)' = 2 \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\}$ , то отримаємо

дуже простий інтеграл

$$\int \frac{dx}{2x+5} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|2x+5| + C.$$

Отже, формули інтегрування частинами та підстановкою використовуються для спрощення підінтегральної функції і зведення обчислюваного інтегралу до табличного.

Невизначений інтеграл ілюструє математичний зміст інтегрування, проте ніякого практичного змісту в собі не містить, оскільки результатом інтегрування є функція, яка, в принципі, не несе ніякої інформації. Глибшим змістом володіє, так званий, визначений інтеграл, застосування якого в економіці є досить широким.

## Визначений інтеграл

**Означення:** *Визначеним інтегралом називається число яке обчислюється за наступним правилом*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1.12.3)$$

де  $a$  та  $b$  — числа, які називають межами інтегралу.

Формула (1.12.3) називається **формулою Ньютона-Лейбніца**. Отже, для обчислення визначеного інтегралу необхідно знайти відповідний невизначений інтеграл та відняти від значення первісної у верхній межі значення первісної у нижній.

Безпосередньо з означення визначеного інтегралу випливає його **геометричний зміст**: якщо  $f(x)$  — неперервна і невід’ємна функція, то  $\int_a^b f(x)dx$  виражає площу криволінійної трапеції, яка обмежена абсцисами  $x=a$  та  $x=b$ , віссю  $OX$  і функцією  $f(x)$ . Число, яке в результаті інтегрування отримується і буде площею відповідної фігури.

Розглянемо приклад, обчисливши інтеграл  $\int_1^3 x^2 dx$ .

$$\int_1^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

$\frac{26}{3}$  — це площа фігури, обмеженої прямими  $x=1$ ,  $x=3$ , віссю  $OX$  та  $f(x)=x^2$ .

Для визначеного інтегралу також є справедливими формули інтегрування частинами та підстановкою, проте в силу наявності меж інтегрування, вони трохи видозмінені:

1.  $\int_a^b v(x)u'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v'(x)u(x)dx$  — інтегрування частинами;
2.  $\int_a^b f(g(x))dx = \int_a^b f(t)dt$ , де  $g(x)=t$ ,  $dx = \frac{dt}{g'(x)}$  — інтегрування підстановкою.

### **Методичні поради для вивчення теми**

Розділ інтегрування є дуже важливим в економічній практиці, хоча й складним для сприйняття. Перед тим як застосувати інтегрування в тій чи іншій економічній задачі, необхідно розуміти, що інтегрування відображає різноманітні сумарні економічні ефекти, наприклад, розмір загального доходу чи витрат за певний проміжок часу, розмір загального доходу відносно кількості проданої продукції, граничні терміни отримання найбільшого прибутку чи найшвидшого покриття боргу та ін. Тому для того, щоб застосування цього математичного апарату було ефективним, необхідно знати всі правила та методи інтегрування.

### **1.13. Економічна динаміка та її моделювання:**

## **диференціальні та різницеві рівняння**

Як правило, багато економічних процесів розгортаються в часі, тому актуальним є питання прогнозу динаміки їх зміни. Це стосується прогнозу росту цін, інфляції, ВВП та багато інших економічних показників. Такі процеси описуються диференціальними рівняннями, розв'язування яких дає змогу спрогнозувати динаміку досліджуваного процесу на протязі певного часу. Основною вимогою при складанні диференціальних рівнянь є неперервність функції, яка описує економічну ситуацію. Якщо ж процес є дискретним, то його представляють через різницеві рівняння.

### **Базові поняття та терміни**

**Означення:** Рівняння називається **диференціальним (ДР)**, якщо воно пов'язує незалежну змінну, функцію та похідні різних порядків цієї функції. В загальному випадку ДР записується так

$$F(x, y, y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^n(x)) = 0.$$

Найвищий порядок похідної функції називається **порядком диференціального рівняння**. Найпоширенішими є ДР 1-го порядку, оскільки вони є найпростішими і легко піддаються аналізу.

**Означення:** **Розв'язком ДР** називається функція  $\varphi(x)$ , яка, при підстановці в ДР, перетворює його на тотожність

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^n(x)) \equiv 0.$$

Дане означення несе в собі дуже важливу інформацію: **розв'язком диференціального рівняння є не конкретне число, а функція**. Найпростішим диференціальним рівнянням 1-го порядку є рівняння

$$y'(x) = f(x), \tag{1.13.1}$$

яке розв'язується простим інтегруванням, тобто

$$\int y'(x) dx = \int f(x) dx \Rightarrow y(x) = \int f(x) dx + C.$$

Наявність константи  $C$  говорить про те, що кожне диференціальне рівняння має безліч розв'язків, які відрізняються сталою.

Ще одним видом диференціальних рівнянь є **диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремленими змінними**, яке має вигляд

$$y'(x) \cdot f(x) + g(y) = 0 \quad (1.13.2)$$

Якщо врахувати, що похідну функції можна представити через відношення диференціалів, тобто

$$y'(x) = \frac{dy}{dx},$$

і відокремити змінні в рівнянні (1.13.2), помноживши його на вираз  $\frac{dx}{f(x)g(y)}$ , то

отримаємо

$$\frac{dy}{g(y)} + \frac{dx}{f(x)} = 0,$$

звідки розв'язок  $y(x)$  шукається елементарним інтегруванням лівої та правої частин рівняння

$$\int \frac{dy}{g(y)} + \int \frac{dx}{f(x)} = \int 0 dx$$

Ряд економічних процесів можна описати за допомогою **лінійного диференціального рівняння 1-го порядку**, яке виглядає наступним чином

$$y'(x) + p(x)y = f(x) \quad (1.13.3)$$

Для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку існує кілька методів. Одним з них є **метод Бернуллі**, який полягає у представленні шуканої функції  $y(x)$  у вигляді

$$y(x) = u(x) \cdot v(x),$$

де  $u, v$  — функції аргументу  $x$ . Тоді  $y'(x) = u'v + uv'$ . Підставивши отримані заміни в рівняння (1.13.3), матимемо

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x);$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x).$$

З останнього рівняння отримуємо систему:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = f(x). \end{cases}$$

Розв'язавши перше рівняння системи, як рівняння з відокремленими змінними, та, підставивши отримане значення функції  $v(x)$  в друге, знайдемо функцію  $u(x)$ . Маючи функції  $v(x)$  та  $u(x)$  знаходимо загальний розв'язок рівняння (1.13.3).

### **Методичні поради для вивчення теми**

Що стосується диференціальних рівнянь 1-го порядку, то при їх розв'язуванні не виникатиме жодних проблем, якщо чітко дотримуватись методики та алгоритму розв'язування, а також вміти інтегрувати функції. Однак, розв'язок диференціальних рівнянь значно ускладнюється з ростом їх порядку.

### **1.14. Ряди та їх застосування**

В даному розділі мова йтиметься про, так звані, числові ряди. Основною цінністю цих математичних об'єктів є те, що у вигляді числового ряду можна представити практично будь-яку функцію, застосувавши при цьому певні формули та перетворення. Дане представлення дає можливість побачити властивості досить складних (в аналітичному плані) функцій. Тому основним завданням даної теми є ознайомлення з поняттям числового ряду, його основними властивостями та дослідженням числових рядів на збіжність.

### **Базові поняття та терміни**

**Означення:** Вираз

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1.14.1)$$

називається **числовим рядом**, а числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  — **членами цього ряду**.

Вважається, що числовий ряд є заданим, якщо задана формула  $a_n$ , за якою можна знайти будь-який його член. Вираз  $a_n$  також називають **загальним членом ряду**. Наприклад, ряд із загальним членом  $a_n = \frac{1}{n}$ , буде виглядати так

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Оскільки, на відміну від числових послідовностей, між членами ряду стоїть операція додавання, то природнім є питання: чому рівна сума цього ряду? На перший погляд здається, що числові ряди суми не мають взагалі, оскільки додається нескінченна кількість елементів. Проте дане припущення є невірним.

Введемо поняття суми числового ряду.

**Означення:** Якщо послідовність частинних сум ряду (1.14.1)

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

є збіжною, то ряд називається збіжним, а саму границю — **сумою ряду**, тобто

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Надалі числовий ряд будемо позначати  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Таким чином, можна зробити

висновок, що ряд має суму тільки тоді, коли він є збіжним. Дослідження числових рядів на збіжність є основним завданням теорії рядів.

Дослідження рядів на збіжність здійснюється за кількома ознаками. Сформулюємо деякі з них.

**Ознака Коші:** Якщо границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  існує і рівна числу  $\delta$ , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \delta$$

то, якщо отримане  $\delta < 1$  — ряд є збіжним, при  $\delta > 1$  — ряд є розбіжним.

**Ознака Д'Аламбера:** Якщо границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  існує, і рівна числу  $\varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varepsilon$$

то, якщо отримане число  $\varepsilon < 1$  — ряд є збіжним, при  $\varepsilon > 1$  — ряд розбіжний.

Бачимо, що обидві ознаки не дають відповіді на питання про збіжність ряду, у випадку коли границя виявиться рівною одиниці. В таких випадках користуються більш складними ознаками, однією з яких є **інтегральна**. Застосовуючи її, ми зводимо дослідження числового ряду до дослідження невласного інтегралу



$$\int_1^{\infty} f(x) dx, \text{ де } f(x) = f(n), \quad x = n.$$

Якщо інтеграл збіжний, то і відповідний йому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  теж збігається, і навпаки.

### ***Методичні поради для вивчення теми***

Очевидно, що даний розділ тісно пов'язаний з теорією границь, оскільки висновок про збіжність чи розбіжність числових рядів можна отримати тільки у випадку правильного обчислення відповідної границі (в залежності від вибраної ознаки). Тому для засвоєння та вивчення теми рядів необхідно володіти всіма прийомами обчислення границь послідовностей. Звичайно, в двох перших ознаках є суттєвий недолік — неможливість дати однозначну відповідь про збіжність ряду при  $\delta = 1$  та  $\varepsilon = 1$  (що трапляється дуже часто). Застосування невласного інтегралу, який обчислюється майже аналогічно до визначеного інтегралу [1; с. 292-295], якраз і є потрібним варіантом для отримання бажаного результату. Тому, правильне обчислення невласних інтегралів є теж невід'ємною умовою при дослідженні числових рядів на збіжність.

## **МОДУЛЬ 2. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА**

### **1. ЕМПІРИЧНІ ТА ЛОГІЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ**

Так склалося, що всі процеси, які відбуваються в природі, зокрема і процеси економічного характеру, є випадковими, тобто поява чи не поява певного економічного результату залежить від багатьох економічних чи людських факторів, які є теж випадковими (отримання бажаного прибутку, як правило залежить від якості товару, його ціни, вдало проведеної рекламної кампанії, попиту на цей товар, форс-мажорних обставин та ін.). Відповідно виникає питання : «Чи можливо хоча б приблизно передбачити кінцевий результат, врахувавши всі фактори впливу? Відповідь на це питання дає "Теорія ймовірностей", яка, вивчаючи випадкові процеси, надає їм конкретного числового тлумачення, назва якого – ймовірність.

#### **Базові поняття та терміни**

Будемо вважати, що **випробування** – це дослід, який за певних умовах може повторюватись скільки завгодно разів. Результатом кожного дослідження є поява чи не поява якоїсь події  $A$  (наприклад, при киданні монети подія  $A$  – випадання герба). Події можуть бути трьох видів: **достовірні** (обов'язково з'являються за відповідних умов), **неможливі** (не можуть з'явитись за відповідних умов) та **випадкові** (за відповідних умов можуть з'явитися, а можуть і не з'явитися). Перші два види подій є тривіальними, тому, абстрагуючись від них, будемо досліджувати тільки випадкові події.

Природно, що з появи чи не появи випадкової події  $A$  в одному випробуванні передбачити результат наступного дослідження не вдасться. Проте, якщо розглянути дану випадкову подію, провівши кілька випробувань (при одних і тих же умовах), то можна побачити певну закономірність її появи. Таку закономірність називають **закономірністю масових однорідних подій**, яка якраз і визначає основне завдання "Теорії ймовірностей".

Введемо основні поняття, які властиві випадковим подіям.

**Означення.** Дві події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них повністю виключає появу іншої у тому ж випробуванні.

Наприклад,  $A$  – "поява герба на монеті",  $B$  – "поява решки на тій же монеті" є несумісними подіями при одноразовому киданні монети.

**Означення.** Дві події називаються **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої (не обов'язково в одному випробуванні).

Прикладом може бути стрільба двох стрільців по мішені, де події  $A$  – "перший стрілок влучив по мішені" та  $B$  – "другий стрілок влучив по мішені" є сумісними, оскільки можуть з'явитися одночасно.

**Означення.** Випадкові події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  утворюють **повну групу подій**, якщо внаслідок випробування хоча б одна з цих подій з'явиться обов'язково.

Під час кидання монети повну групу утворюють події  $A$  – "випав герб" та  $B$  – "випала решка", оскільки внаслідок кидання одна з них з'явиться обов'язково.

**Означення.** Події називаються **рівноможливими**, якщо немає причин стверджувати, що будь-яка з них є більш можливою за інші.

Під час кидання грального кубика випадання усіх шістьох цифр є подіями, рівноможливими між собою.

**Означення.** Дві несумісні події, які утворюють повну групу, називаються **протилежними**.

Як і над числами, так і над подіями теж можна виконувати різноманітні операції, а саме: об'єднання (додавання), перетин (множення) та різницю. Вони є елементарними та не потребують детального ознайомлення [2; с. 23–25].

Перейдемо до поняття ймовірності події та правила її знаходження.

**Означення.** **Ймовірність події**  $A$  дорівнює відношенню числа наслідків, які сприяють появі події  $A$ , до загального числа усіх можливих наслідків.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де  $m$  – кількість наслідків, що сприяють появі події  $A$ ,  $n$  – загальна кількість можливих наслідків.

Дане означення називається **класичним означенням ймовірності**.

Зрозуміло, що  $m < n$ , а тому ймовірність події, будучи правильним дробом – це число, яке міститься в межах

$$0 < p < 1.$$

■ **Приклад.** В урні 10 куль: 6 білих та 4 чорних. Знайти ймовірність появи чорної кулі, якщо одна куля береться навмання.

### ***Розв'язування***

Обчислення цієї ймовірності буде через використання класичного означення ймовірності  $P(A) = \frac{m}{n}$ . Знайдемо  $m$  та  $n$ . Оскільки подія  $A$  полягає в появі чорної кулі, то загальна кількість наслідків, що сприяють її появі, буде рівна кількості чорних куль в урні, тобто  $m=4$ . Що стосується числа  $n$ , то воно буде рівним загальному числу всіх куль в урні, тобто  $n=10$ . Таким чином, отримуємо результат

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Відповідна задача є простою, оскільки ми відразу можемо вказати числові значення  $m$  та  $n$ . Проте, в багатьох завданнях кількість наслідків, які сприяють події  $A$ , не є такою очевидною. Наприклад, якщо в попередньому випадку позначити подію  $A$  – «витягнуто дві чорних та одну білу кулю», то число  $m$  відразу знайти не вдасться. У таких випадках використовують розділ математики, який називається «Комбінаторика» [2; с. 30–35].

## ***2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ЇХ ЕКОНОМІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ***

*Класичне означення ймовірності має ефективне застосування тільки при розв'язуванні простих задач, у яких події, що розглядаються, не є складними. Як правило, більшість задач вимагає дослідження подій, які є складними за своєю суттю або залежать від інших факторів, нехтувати якими не можна. Тому в цьому розділі ми розглянемо основні теореми теорії ймовірностей, застосування яких допомагає знаходити ймовірності таких подій. Особлива увага буде приділена так званим залежним між собою випадковим подіям, оскільки, як уже зазначалось, переважна більшість економічних ситуацій залежить від дії випадкових факторів.*

### ***Базові поняття та терміни***

**Теорема 1.** *Ймовірність об'єднання двох несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (2.1)$$

Дана теорема поширюється і на довільну кількість подій з умовою, що усі вони є попарно несумісними. Наприклад, якщо ймовірність події  $A$  – "стрілець влучить у першу область" рівна  $P(A) = 0,4$ , ймовірність події  $B$  – "стрілець влучить у другу область мішені" рівна  $P(B) = 0,2$ , то ймовірність того, що "стрілець влучить у першу або другу область мішені" буде рівною

$$P(A) + P(B) = 0,4 + 0,2 = 0,6.$$

Зрозуміло, що для такої задачі застосування цієї теореми є можливим, оскільки події  $A$  та  $B$  є несумісними (стрілець не може одночасно влучити і в першу, і в другу область мішені).

З цієї теореми випливають два очевидні наслідки:

- сума ймовірностей повної групи випадкових подій рівна одиниці;
- сума ймовірностей двох протилежних подій рівна одиниці.

$$P(A + \bar{A}) = 1.$$

Важливим у теорії ймовірностей є поняття залежних подій та умовної ймовірності. Розглянемо випадок, який вимагає уведення даних понять. Нехай в урні є 12 куль: 7 білих та 5 чорних. Навмання, одна за одною беремо дві кулі. Якщо кулю, яку взяли першою, повернути назад до урни, то ймовірність появи другої кулі не залежить від того, якого кольору була перша. Проте, якщо перша куля не повертається до урни, то питання "Якого кольору була перша куля?" стає актуальним, оскільки воно безпосередньо впливає на ймовірність появи другої кулі. Таким чином, ми підійшли до поняття залежних подій та умовної ймовірності.

**Означення.** *Випадкові події  $A$  та  $B$  називаються залежними, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи чи неяви другої події. Якщо ж такої залежності між двома подіями немає, то вони називаються незалежними.*

**Означення.** Ймовірність події  $B$ , обчислена за умови, що подія  $A$  з'явилася, називається умовною ймовірністю події  $B$  і позначається  $P_A(B)$ .

Якщо у вищеприведеному прикладі позначити подію  $A$  – "взято білу кулю", а подію  $B$  – "взято чорну кулю", то перед початком експерименту ймовірність вибору чорної кулі рівна  $P(B) = \frac{5}{12}$ . Якщо першою було взято білу кулю, то ймовірність того, що друга куля буде чорною, вже буде рівна  $P_A(B) = \frac{5}{11}$ . У випадку першої кулі чорного кольору, ймовірність того, що друга буде теж чорною вже буде рівною  $P_B(B) = \frac{4}{11}$ . Отже, бачимо, у різних варіантах результату події  $A$  ймовірність появи  $B$  змінюється, що свідчить про їх залежність.

**Теорема 2.** Ймовірність сумісної появи двох випадкових подій  $A$  та  $B$  дорівнює добутку ймовірностей однієї з цих подій та умовної ймовірності другої події за умови, що перша подія з'явилася

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) \quad (2.2)$$

Ця формула використовується тоді, коли події  $A$  та  $B$  залежні. Якщо ж вони між собою не є залежні, то формула (2.2) прийме вигляд

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad (2.3)$$

Якби в попередньому прикладі необхідно було би знайти ймовірність того, що "перша куля буде білою, а друга чорною", то застосування цієї теореми дало би нам такий результат:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$

Трапляються задачі, коли необхідно знайти ймовірність події, яка полягає в об'єднанні двох сумісних подій. У таких випадках необхідно використовувати наступну теорему.

**Теорема 3.** Якщо випадкові події  $A$  та  $B$  сумісні, то ймовірність їх об'єднання дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх сумісної появи, тобто

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (2.4)$$

Часто шукана подія  $A$  може з'явитися тільки сумісно з якоюсь із несумісних подій  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , які утворюють повну групу подій, причому поява однієї з цих

подій теж є випадковою. У таких випадках використовуються формули повної ймовірності та формули Байєса, з якими можна ознайомитися самостійно [2; с. 55–59].

### ***Методичні поради для вивчення теми***

При вивченні даної теми важливим є не стільки знання основних теорем, скільки вміння застосувати їх у конкретній задачі. Іншими словами, під час розв'язування практичних завдань необхідно з'ясувати, що таке шукана подія, які події є її складовими, залежні вони чи незалежні, сумісні чи несумісні і т.д. Якщо такий аналіз задачі буде проведений правильно, то безпосереднє застосування необхідної теореми не викличе жодних труднощів.

Важливим є, також, розуміння поняття об'єднання та добутку подій. Об'єднання (сума) подій застосовується тільки тоді, коли поява однієї події або поява іншої призводить до появи шуканої події, яку вони утворюють. Добуток подій передбачає одночасну їх появу, яка спричинює появу основної шуканої події. Тому, перед застосуванням теорем необхідно описати шукану подію, врахувавши усі наслідки її появи.

### ***3. СХЕМА НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАНЬ***

*Існують задачі, які передбачають проведення випробування не один раз, а певну кількість разів в однакових умовах. Якщо ймовірність появи події  $A$  в кожному з цих випробувань є однаковою, і всі випробування є незалежними між собою, виникає питання знаходження ймовірності певної кількості появ цієї події упродовж усіх випробувань. Іншими словами, цікавою є кількість появ події  $A$  в цих випробуваннях, і яке число появ є найімовірнішим. Дана проблема виникає під час контролю якості товару, його транспортування та інших задачах. Її розв'язування забезпечує схема Бернуллі.*

### ***Базові поняття та терміни***

***Означення.*** Якщо усі  $n$  випробувань проводити в однакових умовах і ймовірність появи події  $A$  в усіх випробуваннях однакова та не залежить від появи

чи не появи  $A$  в інших випробуваннях, то таку послідовність незалежних випробувань називають **схемою Бернуллі**.

Позначимо ймовірність появи події  $A$  в кожному випробуванні  $p$ . Тоді ймовірність її не появи, як ймовірність протилежної події, буде рівна  $1-p=q$ . Якщо поставити питання "Якою буде ймовірність появи події  $A$   $m$  разів у  $n$  випробуваннях?", та врахувати, що таких варіантів буде  $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ , то шукана ймовірність буде обчислюватись за формулою

$$P_n(m) = C_m^n \cdot p^m \cdot q^{n-m} \quad (2.3.1)$$

Формулу (2.3.1) називають **формулою Бернуллі**. Дана формула дає змогу знайти ймовірність появи події  $A$  рівно  $m$  разів в  $n$  незалежних випробуваннях.

**Зауваження.** Формула Бернуллі застосовується тільки для тієї послідовності випробувань, які відповідають вимогам схеми Бернуллі. Якщо не виконується хоча б одна з умов означення схеми (наприклад, ймовірність появи події  $A$  не є однаковою для кожного випробування чи самі випробування є залежними між собою), дана формула не дасть правильного результату.

Якщо точна кількість появ події не важлива, то застосовуються такі формули:

▪ ймовірність появи події  $A$  не менш ніж  $m$  разів у  $n$  незалежних випробуваннях шукають за формулою:

$$P_n(k \geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \dots + P_n(n).$$

Ця формула може застосовуватись, наприклад, для пошуку ймовірності появи події  $A$  не менше 6 разів у 12 незалежних випробуваннях:

▪ ймовірність появи події  $A$  не більш ніж  $m$  разів в  $n$  незалежних випробуваннях можна знайти за формулою

$$P_n(k \leq m) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(m)$$

▪ ймовірність появи події  $A$  хоча би раз у  $n$  незалежних випробуваннях

$$P_n(1 \leq k \leq n) = 1 - q^n.$$

Одним із недоліків схеми Бернуллі є те, що її практичне застосування ускладнюється, якщо кількість випробувань є достатньо великим числом або ймовірності  $p$  та  $q$  є близькими до нуля. У таких випадках потрібно



використовувати формули, які отримані при доведенні так званих граничних теорем у схемі Бернуллі [2, с.73–78].

### ***Методичні поради щодо вивчення теми***

Очевидно, що вищенаведені формули не є складними і потребують лише акуратних арифметичних обчислень. Проблемою може стати їх неправильне застосування, тобто, на перший план, як уже зазначалось у попередніх розділах, виходить початковий аналіз задачі та визначення її типу, а вже потім – застосування конкретної формули. Поставлена задача та описана в ній ситуація повинні обов'язково підпадати під схему Бернуллі, в іншому випадку застосування цих формул призводить до неправильного результату. Що стосується граничних формул у схемі Бернуллі, то варто запам'ятати, у яких випадках схеми Бернуллі їх доцільно використовувати.

### ***4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ІНТЕРПРЕТАЦІЯ***

*В усіх попередніх розділах об'єктом наших досліджень була випадкова подія, яка за відповідних умов могла з'являтися з певною ймовірністю або не з'являтися. Досить часто при дослідженні випадкових процесів, в тому числі й економічних, виникають такі випадкові події, наслідком яких є поява числа, значення якого заздалегідь є невідомим. Прикладом такої випадкової величини може бути кількість прибутку підприємства в залежності від того, як буде проведена рекламна кампанія на запропонований продукт та рівень попиту на нього. Зрозуміло, що точне значення величини прибутку заздалегідь дізнатись неможливо, проте, як виявляється, передбачити всі його можливі значення та знайти серед них найбільш ймовірне є завданням цілком реальним. Відповідно у цьому розділі основним об'єктом для вивчення буде випадкова величина.*

### ***Базові поняття та терміни***

**Означення.** *Випадковою величиною (ВВ) називають таку величину, яка внаслідок випробування може прийняти лише одне числове значення, заздалегідь невідоме і обумовлене випадковими причинами.*

Позначаються випадкові величини великими латинськими літерами, а їх можливі значення – відповідними малими латинськими літерами, тобто

$$X : x_1, x_2, \dots, x_n, Y : y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Випадкові величини поділяються на дискретні та неперервні.

**Означення.** *Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називають таку величину, яка може приймати відокремлені, ізольовані одне від одного числові значення (тобто такі, які можна пронумерувати) з відповідними ймовірностями.*

Наприклад, якщо стрілець робить три постріли по мішені, то випадкова величина  $X$ , яка полягатиме, наприклад, у "кількості влучень стрільцем по мішені при трьох пострілах", може набувати наступних значень:  $X : 0, 1, 2, 3$ . Бачимо, що всі значення ВВ є ізольовані одне від одного, їх є скінченна кількість, а тому ця ВВ є дискретною.

**Означення.** *Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають величину, яка може приймати будь-яке числове значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу  $(a, b)$ . Зрозуміло, що кількість значень такої ВВ є нескінченною.*

Прикладом НВВ може бути величина, яка виникає при вимірюванні зросту людини. Якщо проводити вимірювання з точністю до міліметра, то кількість значень, які може набути така ВВ, буде нескінченною.

На практиці, для повної характеристики ВВ недостатньо знати всі її можливі значення. Найважливішим є відшукування ймовірностей, з якими ВВ може їх набути. Таким чином, ми підійшли до дуже важливого поняття в теорії випадкових величин – *закону розподілу*.

**Означення.** *Законом розподілу випадкової величини називається таке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та ймовірностями, з якими вона може їх набувати.*

Іншими словами, необхідно знайти таку функцію  $f(X)$ , яка б дозволяла за відомими значеннями випадкової величини  $X$  знаходити ймовірності, з якими вона їх може набувати.

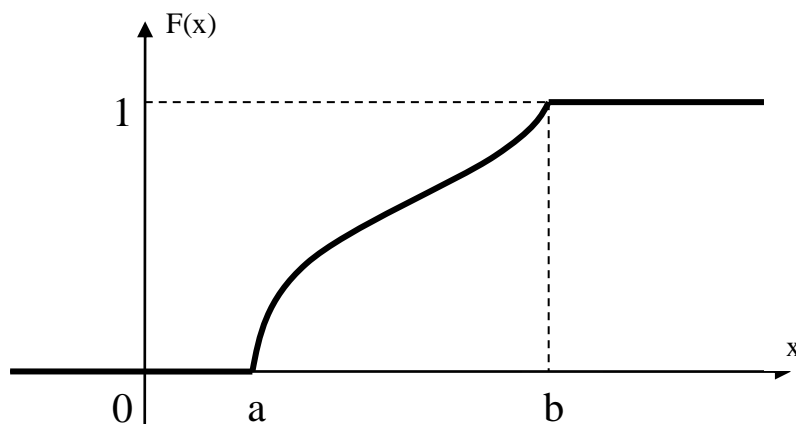
Оскільки НВВ є складнішими за ДВВ, то для полегшення їх аналізу вводяться поняття інтегральної та диференціальної функції розподілу.

**Означення.** *Інтегральною функцією розподілу (функцією розподілу) називають ймовірність того, що випадкова величина  $X$  прийме значення, менше за  $x$ .*

Позначають функцію розподілу  $F(x)$ , а тому за означенням

$$F(x) = P(X < x) \quad (2.4.1)$$

Прикладом функції розподілу може бути графік, зображений на малюнку.



Безпосередньо з графіка інтегральної функції Лапласа та її означення можна сформулювати дуже прості властивості  $F(x)$  [2; с.76]. Якщо НВВ  $X$  може приймати будь-яке значення з деякого інтервалу  $(a, b)$ , то справедливою є рівність

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \quad (2.4.2)$$

Формула (2.4.2) називається **основною формулою теорії ймовірностей**.

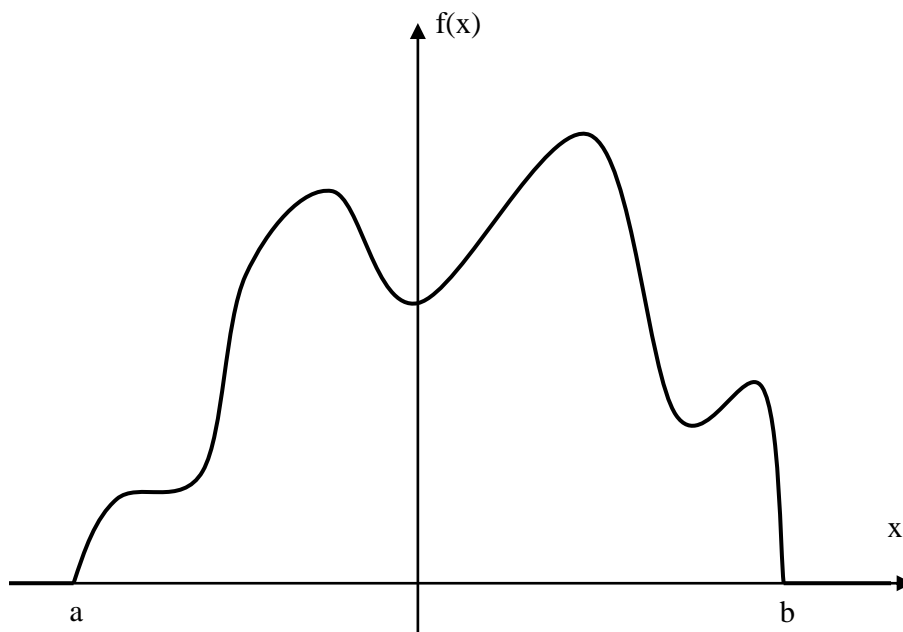
**Означення.** *Диференціальною функцією розподілу або щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від її інтегральної функції розподілу і позначають*

$$f(x) = F'(x)$$

Основна формула теорії ймовірностей може бути записана і через щільність

$$\text{розподілу } f(x) P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Щільність розподілу може мати, наприклад, такий графік:



Часто виникає потреба при наявності щільності розподілу знайти функцію розподілу і навпаки. У таких випадках варто використовувати формулу, яка встановлює зв'язок між цими двома характеристиками  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$ .

## **5. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН**

*Вже зазначалось, що наявність усіх значень, які може набувати випадкова величина, не є її достатньою характеристикою. Повну інформацію про випадкові величини дає співвідношення, яке називається законом розподілу випадкової величини і його відшукування є фактично найважливішим завданням у теорії випадкових величин. Окремо будуть розглядатися так звані числові характеристики ВВ, які стають у нагоді, коли закон розподілу за певних причин знайти не вдається.*

### **Базові поняття та терміни**

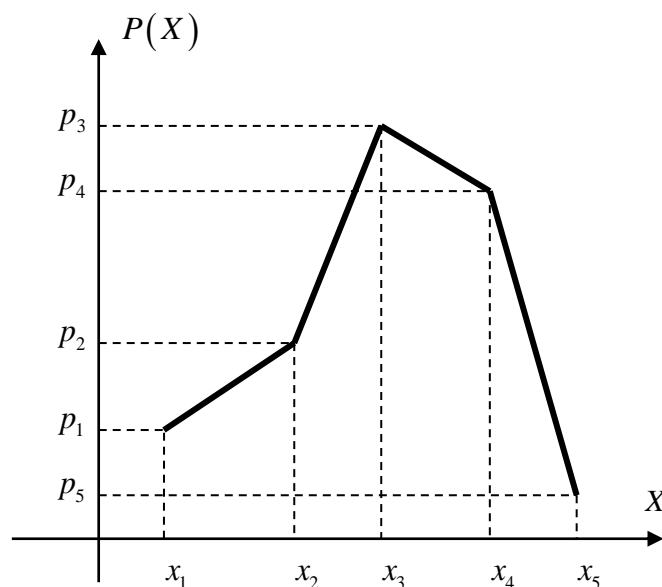
#### **Дискретні випадкові величини.**

Будь-яку ДВВ можна задати таблично, графічно та аналітично. У випадку *табличного* задання, використовується двовимірна таблиця або, як його ще називають, *ряд розподілу*

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$P(X)$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Ряд розподілу характеризується двома рядками: у першому записуються всі можливі значення ДВВ, у другому – ймовірності, з якими ДВВ набуває цих значень. Зрозуміло, що дане подання ВВ є доцільним у тих випадках, коли відомі всі її можливі значення та відповідні їм ймовірності.

*Графічний* спосіб подання полягає в побудові ламаної лінії, яка сполучає точки  $(x_1, p_1)$ ,  $(x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n)$ , де перша координата – значення ДВВ, а друга – ймовірність, з якою випадкова величина набуває це значення (числові значення координат, як правило, беруться з описаного вище ряду розподілу). Прикладом такого подання може бути наступний графік:



Отриманий графік дуже часто називають *многокутником розподілу*.

**Означення:** *Модюю* називається значення дискретної випадкової величини, ймовірність якої є найбільшою.

На наведеному графіку модюю буде значення  $x_3$ , оскільки відповідна йому точка розміщена найвище.

Найважливішим способом задання ДВВ є *аналітичний*. Він полягає у визначенні деякої функції  $f$ , за якою можна було б, знаючи всі значення  $x_k$  ДВВ, знайти відповідні їм ймовірності  $p_k$ , тобто  $p_k = f(x_k)$ , при  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Така функціональна залежність між значенням ВВ та її ймовірністю називається *законом розподілу*. Існує багато вже виведених законів розподілу ДВВ, проте найважливішими з них наведені нижче:

**Біноміальний закон розподілу.** Відповідно до цього закону дискретна випадкова величина, що виникає в схемі Бернуллі ( тобто, коли розглядається  $n$  незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія з'являється з деякою ймовірністю  $p$  ), розподілена як:

$$P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Наприклад, ДВВ, яка полягає в "кількості випадань числа "5" при 50-ти разовому підкиданні правильного грального кубика", розподілена за біноміальним законом.

**Закон розподілу Пуассона.** Цей закон використовується в схемі Бернуллі, якщо кількість незалежних випробувань  $n$  є досить великою, або ймовірність появи деякої події в кожному з цих випробувань  $p$  є близькою до нуля. Даний закон має вигляд

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (a > 0), \quad \text{де } a = n \cdot p.$$

Якщо ймовірність того, що випущена стандартна деталь буде бракованою, рівна  $p = 0,00001$ , то ДВВ  $X$ , яка полягає в "кількості бракованих виробів серед 10000 випущених", розподілена за законом Пуассона.

Як правило, закон розподілу повністю характеризує ВВ. Однак, у практичній діяльності не завжди вдається одержати таке співвідношення, оскільки його аналітичний вигляд є надто складним для практичних розрахунків. У таких випадках додатково обчислюються так звані *числові характеристики випадкових величин*. Найпоширенішими з них є математичне сподівання, дисперсія та середньоквадратичне відхилення.

**Означення:** *Математичним сподіванням* дискретної випадкової величини  $X$  називають число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень ДВВ  $X$  на відповідні їм імовірності.

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k, \quad k=1,2,3,\dots,n.$$

Математичне сподівання характеризує *центр розподілу* значень ДВВ (враховуючи ймовірності, з якими ці значення можуть появлятися). Середнє значення величини  $X$ , отримане у вигляді суми добутків усіх значень, які вона набувала, на ймовірності цих значень. Таке тлумачення середнього дає можливість за аналогією із середнім значенням ввести *очікуване середнє* або математичне сподівання, що може бути розраховане, на відміну від реального середнього, без проведення експерименту. Математичне середнє випадкової величини збігається з реальним середнім, що було б отримане при дуже великій кількості вимірів.

Математичне сподівання має ряд простих та цікавих властивостей [2, с.106].

**Означення:** *Дисперсією* ДВВ  $X$  називають число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення ДВВ  $X$  від її математичного сподівання.

$$D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right).$$

Дисперсія будь-якої ДВВ є числом невід'ємним і характеризує *розсіювання* можливих значень  $X$  відносно до її центру розподілу. Як правило, дисперсію на практиці обчислюють за наступною формулою:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Для дисперсії теж характерні ряд елементарних властивостей [2, с.108–109].

**Означення.** *Середньоквадратичним відхиленням* ДВВ  $X$  називають число, яке дорівнює кореню квадратному із дисперсії.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Унаслідок того, що деякі ВВ мають розмірність (метри, міліметри, грами тощо), дисперсія  $D(X)$  вимірюватиметься в квадратних одиницях цієї розмірності. Оскільки в деяких практичних задачах доцільно знати *величину розсіювання ВВ в*

*розмірності цієї величини*, то для цього використовують середньоквадратичне відхилення.

■ **Приклад.** Знайти числові характеристики ДВВ  $X$ , яка полягає в "кількості випадання числа "3", при дворазовому киданні правильного грального кубика".

### *Розв'язування*

Зрозуміло, що ця дискретна випадкова величина розподілена за біноміальним законом, оскільки розглядається два незалежних випробування, в кожному з яких подія – "випаде число "3" може з'явитися з однаковою ймовірністю  $p = \frac{1}{6}$ .

Застосовуючи формулу для цього закону, записуємо ряд розподілу ВВ  $X$  :

$X$	0	1	2
$P(X)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$

З отриманого ряду розподілу знаходимо всі числові характеристики:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3}.$$

$$D(X) = 0^2 \cdot \frac{25}{36} + 1^2 \cdot \frac{5}{18} + 2^2 \cdot \frac{1}{36} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{5}{18}, \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{18}}.$$

### **Неперервні випадкові величини**

Очевидним є те, що задати НВВ таблично не вдасться в силу того, що кількість значень такої ВВ є нескінченною. Єдиним варіантом подання НВВ є представлення її закону розподілу. Розглянемо деякі відомі закони розподілу.

**Рівномірний закон розподілу.** Даний закон властивий тим НВВ, усі можливі значення яких належать деякому проміжку  $(a, b)$ , і щільність їх ймовірностей у

цьому проміжку постійна, тобто має вигляд  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$ .



З самого запису щільності ймовірностей даної ВВ зрозуміло, що ймовірність набуття нею будь-якого значення з інтервалу  $(a,b)$  є однаковою для всіх цих значень і рівна  $p = \frac{1}{b-a}$ .

**Показниковий закон розподілу.** Неперервна випадкова величина  $X$  розподілена за показниковим законом, якщо її щільність ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \text{ де } \lambda \text{ – невідомий параметр.}$$

Даний закон властивий тільки тим випадковим величинам, які набувають лише невід'ємних значень. Графіком такого розподілу буде експоненціальна функція, вигляд якої залежатиме від значення невідомого параметра  $\lambda$ .

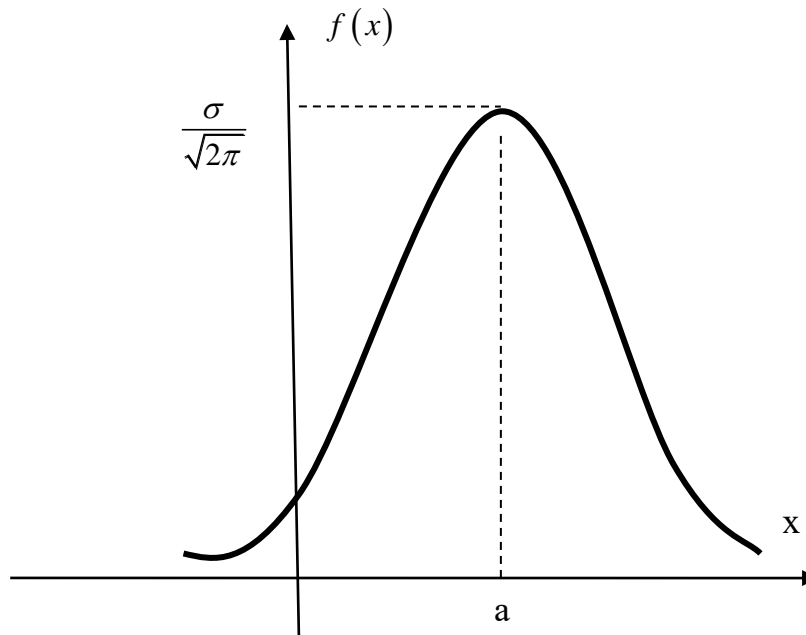
За показниковим законом розподілені такі ВВ, як час телефонної розмови, час безвідмовної роботи комп'ютера та інші.

**Нормальний закон розподілу.** Якщо щільність ймовірностей НВВ має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

то вважається, що вона розподілена за нормальним законом. Параметри  $a$  та  $\sigma$  є числовими характеристиками даної НВВ – математичним сподіванням та середньоквадратичним відхиленням. Це означає, що для повної характеристики нормального закону розподілу достатньо знати лише ці дві величини.

Графіком нормального розподілу є нормальна крива або, як її ще називають, – крива Гаусса:



Якщо відомо, що НВВ  $X$  розподілена за нормальним законом, то ймовірність того, що вона набуде значення з інтервалу  $(c, d)$  можна знайти за формулою

$$P(c < X < d) = \Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right),$$

де  $\Phi(x)$  – інтегральна функція Лапласа.

Як бачимо, кожен із законів залежить від деяких параметрів, роль яких дуже часто відіграють числові характеристики. Розглянемо правила їх обчислення.

**Теорема 1.** Якщо всі можливі значення НВВ  $X$  містяться в інтервалі  $(a, b)$  і відома щільність ймовірностей  $f(x)$  даної НВВ, то **математичне сподівання** визначається за наступною формулою

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

Важливо пам'ятати, що математичне сподівання НВВ – це число, яке завжди повинно міститися в межах інтервалу, на якому випадкова величина  $X$  набуває усіх своїх значень.

**Теорема 2.** Якщо всі можливі значення НВВ  $X$  містяться в інтервалі  $(a, b)$ , і відома щільність ймовірностей  $f(x)$  даної НВВ, то **дисперсія** обчислюється за наступною формулою:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - (M(X))^2.$$

**Середньоквадратичне відхилення** НВВ є аналогічним до відповідної характеристики ДВВ і обчислюється за формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Варто сказати, що для відомих законів розподілу ДВВ і НВВ виведені формули для знаходження числових характеристик, які значно спрощують процес їх обчислення [2, с.113, 119–122].

■ **Приклад.** Знайти числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

### **Розв'язування**

Із аналітичного запису щільності ймовірностей даної НВВ зрозуміло, що вона розподілена за показниковим законом розподілу з параметром  $\lambda = 5$ . Для обчислення числових характеристик можна застосувати подані вище формули. Проте, для показникового закону числові характеристики залежать від невідомого параметра:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Використовуючи дані формули, отримуємо:

$$M(X) = \frac{1}{5}, \quad D(X) = \frac{1}{25}, \quad \sigma(x) = \frac{1}{5}.$$

Якщо обчислити дані числові характеристики за класичними формулами (із визначеними інтегралами), результат буде ідентичним.

### **Методичні поради для вивчення теми**

Досліджуючи випадкові величини, важливо розуміти різницю між дискретними та неперервними ВВ, оскільки від цього залежить правильність подальших обчислень. Після визначення типу ВВ необхідно знайти закон, за яким вона розподілена. Як правило, більшість задач підпорядковується уже відомим законам розподілу, однак існує багато випадків, коли функціональне співвідношення між значеннями ВВ та відповідними ймовірностями знайти важко.

Числові характеристики ВВ – це саме ті величини, за допомогою яких можна оцінити закон розподілу.

## **6. БАГАТОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ**

У попередньому розділі розглядалися випадкові величини, які в кожному випробуванні можуть набувати лише одне, заздалегідь невідоме, значення. Іншими словами, розглядалися так звані – *одновимірні випадкові величини*. Проте можна навести приклади випадкових величин, які визначаються відразу кількома числами. Такі випадкові величини називаються *багатовимірними*. Для багатовимірних ВВ також вводяться поняття закону розподілу та числових характеристик.

### **Базові поняття та терміни**

**Означення.** Якщо можливі значення випадкової величини визначаються у кожному випробуванні  $2, 3, 4, \dots, n$  числами, то таку випадкову величину називають **багатовимірною**.

Для простоти розуміння понять теорії багатовимірних випадкових величин, будемо розглядати двохвимірну випадкову величину і позначатимемо її  $(X, Y)$ , де  $X$  та  $Y$  – компоненти, кожна з яких є одновимірною випадковою величиною. Багатовимірні випадкові величини діляться на дискретні та неперервні.

**Означення.** Законом розподілу двохвимірної випадкової величини називають перелік усіх можливих значень цієї величини  $(x_i, y_k)$  та їх ймовірностей  $p(x_i, y_k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Для дискретних двохвимірних випадкових величин найпоширенішим способом задання є табличний.

<b>Y</b>	<b>X</b>					
	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_n$
$y_1$	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	...	$p(x_i, y_1)$	...	$p(x_n, y_1)$
$y_2$	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	...	$p(x_i, y_2)$	...	$p(x_n, y_2)$
...	...	...	...	...	...	...
$y_k$	$p(x_1, y_k)$	$p(x_2, y_k)$	...	$p(x_i, y_k)$	...	$p(x_n, y_k)$
...	...	...	...	...	...	...
$y_m$	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	...	$p(x_i, y_m)$	...	$p(x_n, y_m)$

У першому рядку таблиці записуються всі можливі значення ДВВ  $X$  ( $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ ), а в першому стовпчику – усі можливі значення ДВВ  $Y$  ( $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_m$ ). На перетині кожного рядка та стовпчика містяться ймовірності  $p(x_i, y_k)$ . Наприклад,  $p(x_2, y_5)$  – це ймовірність того, що двохвимірний ДВВ  $(X, Y)$  прийме значення  $(x_2, y_5)$ . Важливим правилом побудови табличного закону розподілу є те, що сума всіх ймовірностей  $p(x_i, y_k)$  повинна дорівнювати одиниці.

З кожної двовимірної таблиці розподілу ДВВ  $(X, Y)$  можна отримати закони розподілу кожної з компонент. Для цього, в залежності від того, закон якої ВВ потрібно знайти, достатньо просумувати всі ймовірності в стовпчиках чи рядках. Наприклад, якщо закон розподілу ДВВ  $(X, Y)$  подається таблицею

Y	X		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$y_1$	0,1	0,3	0,2
$y_2$	0,06	0,18	0,16

то закони розподілу кожної з компонент матимуть наступний вигляд:

X	$x_1$	$x_2$	$x_3$
P	0,16	0,48	0,36

Y	$y_1$	$y_2$
P	0,6	0,4

Очевидно, що ймовірність  $p(y_1) = 0,1 + 0,3 + 0,2 = 0,6$  отримана в результаті суми ймовірностей, які знаходяться в першому рядочку таблиці ВВ  $(X, Y)$ .

Як і у випадку одновимірних ВВ, для багатовимірних теж вводяться поняття інтегральної та диференціальної функцій розподілу. **Інтегральна функція розподілу двохвимірної випадкової величини** – це функція двох змінних  $F(x, y)$ , яка визначається за наступною рівністю:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Функція розподілу багатовимірної ВВ є неспадною та міститься в межах  $[0, 1]$ .

**Щільність розподілу двохвимірної випадкової величини** – це друга мішана похідна від функції розподілу

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y).$$

Числові характеристики дискретних двохвимірних ВВ величин  $(X, Y)$  обчислюються окремо для кожної з компонент за формулами, визначеними для одновимірних ВВ і мають той самий зміст. Поряд з математичним сподіванням, дисперсією та середньоквадратичним відхиленням для двохвимірних ВВ вводиться **поняття кореляційного моменту**  $K_{XY}$ , який обчислюється за формулою:

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (x_i - m_X)(y_k - m_Y),$$

де  $m_X, m_Y$  – математичні сподівання кожної з компонент. Кореляційний момент необхідний для обчислення **коефіцієнта кореляції**.

**Означення.** *Випадкові величини  $X$  та  $Y$  називаються залежними, якщо закон розподілу однієї з них залежить від того, які значення прийняла друга. В протилежному випадку такі випадкові величини називаються незалежними.*

**Означення.** **Коефіцієнтом кореляції**  $r_{XY}$  називається кількісна характеристика залежності випадкових величин  $X$  та  $Y$ , і дорівнює:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y},$$

де  $\sigma_X, \sigma_Y$  – середньоквадратичні відхилення випадкових величин  $X$  та  $Y$ .

Коефіцієнт кореляції знаходиться в межах  $[-1, 1]$ . Якщо дві випадкові величини незалежні між собою, то це означає, що вони є **некорельованими**, і їх коефіцієнт кореляції  $r_{XY} = 0$ . Якщо між двома ВВ існує деяка залежність, то  $r_{XY} \neq 0$  (зокрема, при існуванні лінійної залежності між  $X$  та  $Y$  –  $|r_{XY}| = 1$ ).

■ **Приклад.** Обчислити всі числові характеристики заданої двохвимірної випадкової величини та коефіцієнт кореляції:

Y	X		
	0	1	3
-2	0,1	0,3	0,2
1	0,06	0,18	0,16

### **Розв'язування**

Випишемо закони розподілу одновимірних випадкових величин  $X$  та  $Y$  та обчислимо числові характеристики для кожної з них.

X	0	1	3
P	0,16	0,48	0,36

Y	-2	1
P	0,6	0,4

$$m_X = 0 \cdot 0,16 + 1 \cdot 0,48 + 3 \cdot 0,36 = 0,48 + 1,08 = 1,56, \quad m_Y = -2 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 = 0,4 - 1,2 = -0,8$$

$$D_X = 0^2 \cdot 0,16 + 1^2 \cdot 0,48 + 3^2 \cdot 0,36 = 0,48 + 3,24 = 3,72$$

$$D_Y = (-2)^2 \cdot 0,6 + 1^2 \cdot 0,4 = 2,4 + 0,4 = 2,8$$

$$\sigma_X = \sqrt{3,72} = 1,93,$$

$$\sigma_Y = \sqrt{2,8} = 1,67$$

Маючи числові характеристики кожної з одновимірних ВВ, знаходимо кореляційний момент та коефіцієнт кореляції.

$$K_{XY} = (0 - 1,56)(-2 + 0,8) + (0 - 1,56)(1 + 0,8) + (1 - 1,56)(-2 + 0,8) + (1 - 1,56)(1 + 0,8) + (3 - 1,56)(-2 + 0,8) + (3 - 1,56)(1 + 0,8) = 1,87 - 2,81 + 0,67 - 1,01 - 1,73 + 2,59 = -0,42$$

Знаходимо коефіцієнт кореляції:

$$r_{XY} = \frac{-0,42}{1,93 \cdot 1,67} = \frac{-0,42}{3,22} = -0,13.$$

Оскільки коефіцієнт кореляції не дорівнює нулю, то це означає, що ВВ  $X$  та  $Y$  – корельовані, а отже, залежні між собою (хоча зв'язок є дуже слабким).

Розглядаючи неперервні двохвимірні випадкові величини, звернемо увагу на те, що їх числові характеристики обчислюються за формулами, аналогічними одновимірним неперервним ВВ, з тією лише різницею, що треба проводити подвійне інтегрування (оскільки щільність розподілу двохвимірної ВВ  $f(x, y)$  є функцією двох змінних) [2, с.139–140].

### ***Методичні поради для вивчення теми***

У загальному, дослідження багатовимірних випадкових величин, зокрема двохвимірних, у кінцевому результаті зводиться до дослідження одновимірних ВВ. Основною відмінністю є те, що всі числові характеристики обчислюються окремо для кожної з компонент, що утворюють багатовимірну ВВ.

Невеликі труднощі виникають під час вивчення неперервної двовимірної ВВ, оскільки для обчислення числових характеристик необхідно застосовувати подвійні інтеграли, вивчення яких виходить за межі програми. Новим поняттям є

також коефіцієнт кореляції, який допомагає встановити існування залежності між компонентами багатовимірних ВВ. Його числове значення вказує на силу такого зв'язку (чим  $r_{xy}$  ближче до нуля, тим зв'язок є слабшим), хоча рівність кореляційного коефіцієнта нулю ще не гарантує незалежність двох ВВ.

## **7. ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОГО АРГУМЕНТУ**

*Іноді може скластися ситуація, яка вимагає дослідження одночасно кількох випадкових величин, залежних одна від одної. Прикладом може виступати аналіз діяльності підприємства, при якому необхідно враховувати кількість працюючих  $X$  та кількість виготовленої продукції  $Y$ . Оскільки, в силу різних факторів кількість працюючих та кількість виготовлених виробів кожного дня може бути різною, це означає що ці дві величини є випадковими, причому значення ВВ  $Y$  залежить від значення ВВ  $X$ . Таким чином, предметом дослідження стає вже не ВВ, а функція, аргумент якої є величиною випадковою, тому, основним завданням буде встановлення закону розподілу функції випадкового аргументу за умови, що закон розподілу її аргументу є відомим.*

### **Базові поняття та терміни**

**Означення.** Якщо вказано закон, за яким кожному можливому значенню випадкової величини  $X$  ставиться у відповідність деяке значення випадкової величини  $Y$ , то  $Y$  називається **функцією від  $X$**  і позначається

$$Y = \varphi(X)$$

Нехай відомий закон розподілу дискретної ВВ  $X : x_1, x_2, \dots, x_n$ , а саме

$X = x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P(X)$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

Тоді,  $Y$ , як функція від ВВ  $X$ , теж є дискретною ВВ з можливими значеннями:  $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$ . Ймовірності набуття ВВ  $Y$  своїх можливих значень будуть рівними  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , оскільки з події "ВВ  $X$  прийняла значення  $x_k$ " випливає подія "ВВ  $Y$  прийняла значення  $\varphi(x_k)$ ", тобто закон розподілу ВВ  $Y$  виглядає так

$Y$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\dots$	$\varphi(x_n)$
-----	----------------	----------------	---------	----------------



$P(Y)$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$
--------	-------	-------	-----	-------

Таким чином, ми отримали дискретну випадкову величину  $Y$ , що є функцією від випадкової величини  $X$ . Оскільки закон розподілу  $Y(X)$  є відомим, обчислення числових характеристик проводиться з формулами для одновимірних дискретних випадкових величин.

Якщо всі значення неперервної ВВ  $X$  знаходяться на проміжку  $[a, b]$ , то числові характеристики ВВ  $Y = \varphi(X)$ , знаходять за формулами:

$$M(Y) = M(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(x) \cdot f(x) dx$$

$$D(Y) = D(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi^2(x) \cdot f(x) dx - (M(\varphi(X)))^2$$

$$\sigma(Y) = \sigma(\varphi(X)) = \sqrt{D(\varphi(X))}.$$

Оскільки за даними формулами обчислюються числові характеристики функції  $Y$  неперервного випадкового аргументу  $X$ , то єдиною їх відмінністю від аналогічних формул для простої неперервної випадкової величини є заміна  $x$  на функцію  $\varphi(x)$ .

■ **Приклад.** Задано закон розподілу ВВ  $X$

$X = x_i$	2	4	7
$P(X)$	0,3	0,25	0,45

Знайти закон розподілу функції  $Y = 2X^2 + 3$  та її числові характеристики.

### **Розв'язування**

Оскільки ВВ  $X$  є дискретною, то і функція  $Y$  теж буде дискретною ВВ. Усі її можливі значення знаходимо за вказаною функціональною залежністю, а саме:

$$\varphi(x) = 2x^2 + 3.$$

Тоді,  $y_1 = 2 \cdot 2^2 + 3 = 11$ ,  $y_2 = 2 \cdot 4^2 + 3 = 35$ ,  $y_3 = 2 \cdot 7^2 + 3 = 101$  і закон розподілу ВВ  $Y$  матиме вигляд:

$Y$	11	35	101
$P(Y)$	0,3	0,25	0,45

Знаходимо числові характеристики ВВ  $Y$ , використовуючи знайдений нами закон

$$M(Y) = 11 \cdot 0,3 + 35 \cdot 0,25 + 101 \cdot 0,45 = 3,3 + 8,75 + 45,45 = 57,5$$

$$D(Y) = 11^2 \cdot 0,3 + 35^2 \cdot 0,25 + 101^2 \cdot 0,45 - (57,5)^2 = 36,3 + 306,25 + 4590,45 - 3306,25 = 1626,75$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{1626,75} = 40,33.$$

## 8. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

*Природа влаштована так, що сукупна дія великої кількості випадкових факторів втрачає випадковий, а набуває закономірний характер, тобто призводить до так званих статистичних закономірностей. Ця властивість підтверджена тим фактом, що частота появи певної події, починаючи з відповідної кількості випробувань, вже не змінюється, а залишається стабільною. Тому, виникла потреба обґрунтування даного факту математично. Так сформувалась сукупність теорем, які були об'єднані у систему – закон великих чисел. Цим законом користуються, наприклад, під час перевірки якості великої кількості сировини, обираючи тільки певну кількість проб, а не всю партію. Прикладів застосування цих важливих теорем можна наводити дуже багато, проте найкрасномовнішим і найпростішим є такий: щоб дізнатися смак страви, не потрібно з'їдати її всю (хоча це стосується тільки того випадку, коли ви дійсно хочете спробувати, а не наїстися).*

### **Базові поняття та терміни**

**Перша нерівність Чебишева.** Для довільної випадкової величини  $X$ , яка приймає тільки невід'ємні значення та має скінченне математичне сподівання  $M(X)$  справедливою є нерівність:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{M(X)}{\alpha}.$$

Іншими словами, ймовірність того, що невід'ємна випадкова величина  $X$  набуде значення, більшого за деяке число  $\alpha$ , ніколи не перевищить числа  $-\frac{M(X)}{\alpha}$ .

**Друга нерівність Чебишева.** Якщо випадкова величина  $X$  має скінченне математичне сподівання  $M(X)$  та дисперсію  $D(X)$ , то яке б число  $\varepsilon > 0$  ми не взяли, завжди справедливою є нерівність:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Друга нерівність Чебишева дає змогу при відомій дисперсії  $D(X)$  оцінити відхилення випадкової величини  $X$  від її математичного сподівання  $M(X)$ . Наприклад, якщо дисперсія деякої випадкової величини  $X$  рівна  $D(X) = 0,002$ , то ймовірність того, що ВВ  $X$  відрізняється від свого математичного сподівання менш ніж на  $0,1$ , можна оцінити за допомогою другої нерівності Чебишева:

$$P(|X - M(X)| < 0,1) \geq 1 - \frac{0,002}{(0,1)^2} = 1 - \frac{0,002}{0,01} = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Отриманий результат є свідченням того, що при дисперсії  $D(X) = 0,002$  ймовірність, що різниця між випадковою величиною  $X$  та її математичним сподіванням  $M(X)$  не перевищуватиме  $0,1$ , становитиме не менше  $0,8$ , тобто є подією дуже ймовірною. Наведені нерівності є потужним апаратом для доведення важливих граничних теорем.

**Теорема Бернуллі.** Нехай ймовірність появи події  $A$  в кожному із  $n$  незалежних повторних випробувань дорівнює  $p$ , а  $m$  – число появ події  $A$  в  $n$  випробуваннях. Тоді справедливою є рівність:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad \varepsilon > 0.$$

Очевидно, що ця теорема застосовується у схемі Бернуллі і остання рівність є справедливою для випадкових величин, розподілених за біноміальним законом. Теорема Бернуллі стверджує, що яке б мале число  $\varepsilon > 0$  ми не взяли, починаючи з деякого випробування в схемі Бернуллі, різниця між ВВ  $X = \frac{m}{n}$  ( $m$  – кількість появ події  $A$ ,  $n$  – загальна кількість випробувань) та її математичним сподіванням  $M(X) = p$  буде за модулем меншою за вибране нами  $\varepsilon$ , а при нескінченній кількості випробувань ймовірність такого факту прямує до 1 (стає подією достовірною).

**Центральна гранична теорема.** Нехай задана послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , математичне сподівання кожної з яких рівне  $M(X_i)=0$ , а дисперсія стала –  $D(X_i)=b$ . Тоді випадкова величина  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , яка є сумою ВВ  $X_i$  має числові характеристики:

$$M(Y_n) = \sum_{i=1}^n M(X_i) = 0, \quad D(Y_n) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = n \cdot b,$$

та при  $n \rightarrow \infty$  її щільність прямує до нормального закону з параметрами  $a=0$  та  $\sigma = \sqrt{nb}$ .

Дана центральна теорема доводить той факт, що при  $n \geq 30$  розподіл суми однаково розподілених випадкових величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  є близьким до нормального закону розподілу.

### **Методичні поради для вивчення теми**

Закон великих чисел та, зокрема, всі теореми, які він поєднує, є певною мірою складним для розуміння математичним апаратом, оскільки застосовується або для оцінки нескінченних випадкових величин, або для складних систем, елементами яких є нескінченна кількість випадкових величин. Важливим моментом при вивченні цієї теми є розуміння того, що дають нам граничні теореми. Необхідно спочатку зрозуміти, в яких випадках вони працюють, та які корисні висновки можна отримати під час їх застосування. Закон великих чисел носить узагальнювальний характер, а тому вимагає дещо ширшого бачення теорії випадкових величин.

## **9. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ**

До цих пір предметом наших досліджень були тільки послідовності незалежних між собою випробувань, які ніяким чином не були між собою пов'язані. Однак, на практиці досить часто доводиться вивчати послідовності випробувань, які не завжди незалежні. Більше того, більшість реальних процесів, що відбуваються в природних чи лабораторних умовах описуються саме системами залежних між собою випробувань. Нашою метою є ознайомлення з

основними поняттями та нюансами теорії залежних випробувань, а тому предметом дослідження будуть найпростіші її представники – однорідні ланцюги Маркова.

### **Базові поняття та терміни**

**Означення.** Випробування, що утворюють послідовність, називаються **залежними**, якщо ймовірність настання певної події залежить від результату, який був отриманий у попередніх випробуваннях.

**Означення.** Якщо ймовірність появи певної події в  $k$ -му випробуванні залежить лише від результату попереднього  $(k-1)$ -го випробування та не залежить від проведених раніше і номера випробування, в якому дана подія розглядається, то така послідовність називається **однорідним ланцюгом Маркова**.

Будемо вважати, що кожна із подій буде відповідати певному стану системи випробувань, а процес кожного випробування відобразить перехід системи із одного стану в інший. Загальну кількість станів системи позначимо числом  $N$ , яке може бути як скінченним так і нескінченним. У такому випадку ймовірність переходу системи зі стану  $\omega_i$  у стан  $\omega_j$ , за умови, що стан  $\omega_i$  обов'язково передував стану  $\omega_j$ , буде умовною ймовірністю певної події

$$p_{ij} = P(\omega_i \rightarrow \omega_j).$$

Враховуючи те, що після першого випробування система може опинитися в будь-якому з  $N$  можливих станів, набір коефіцієнтів  $p_{ij}$ ,  $i, j=1,2,\dots,N$  утворює **матрицю переходу** за один крок (у першому випробуванні):

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix}.$$

Оскільки  $p_{ij}$  – ймовірності, то  $p_{ij} \geq 0$ . На першому випробуванні система може перейти із довільного  $i$ -го стану в довільний  $j$ -й стан, а тому сума ймовірностей, які стоять у кожному з рядків матриці  $\pi_1$  рівна одиниці.

Коли відомими є всі можливі коефіцієнти (ймовірності  $p_{ij}$ ) матриці  $\pi_1$ , можна побудувати матрицю переходу  $\pi_2$ , що відповідає другому кроку. Врахувавши те, що ймовірність переходу зі стану  $\omega_i$  в стан  $\omega_j$  на другому кроці залежить від того, в якому стані перебувала система після першого, усі коефіцієнти матриці  $\pi_2$  обчислюються за формулою:

$$P_2(\omega_i \rightarrow \omega_j) = a_i p_{ij},$$

де  $a_i$  – ймовірність, з якою після першого кроку система могла опинитися у стані  $\omega_i$ . Наступна матриця переходу  $\pi_3$  будується аналогічно, проте вже на основі коефіцієнтів попередньої матриці  $\pi_2$  і т. д. За таким підходом будуються всі можливі випадки однорідного ланцюга Маркова при скінченній кількості залежних випробувань. У випадку нескінченної кількості залежних випробувань необхідно намагатися вловити певну закономірність між кроками (якщо вона звичайно існує).

Найпростішим прикладом однорідного ланцюга Маркова є задача про блукаючу частинку.

■ **Приклад.** Задано відрізок, на якому закріплено чотири вузли. Частинка рухається по відрізку внаслідок поштовхів, після кожного з яких вона може переміститись вліво чи вправо на один вузол. На першому і на четвертому вузлі стоять дзеркала, що відбивають частинку. Ймовірність того, що внаслідок поштовху частинка зміститься на один вузол вліво рівна 0,6, а на один вузол вправо – 0,4. Після поштовху на місці частинка залишитись не може. Побудувати матрицю  $\pi_1$ .

### ***Розв'язування***

Під станом системи в цьому прикладі розуміється вузол, у якому перебуватиме частинка після кожного випробування. Зрозуміло, що перед першим випробуванням частинка може знаходитись в будь-якому з чотирьох вузлів. Якщо вона опинилась всередині відрізка, то на першому кроці вона може здійснити перехід тільки на сусідні вузли, а тому всі коефіцієнти  $p_{i+1} = 0,4$  а  $p_{i-1} = 0,6$ . Решта ймовірностей рівні нулю. Залишилось дослідити випадок, коли частинка перед першим кроком знаходиться на першому та на четвертому вузлі. Якщо вона

перебуває на першому вузлі, то єдиним варіантом першого кроку для неї є перехід на другий вузол. Оскільки цей варіант єдиний, то ймовірність такої події рівна одиниці, а отже  $p_{12} = 1$ . Аналогічно, з четвертого вузла частинка може зміститись тільки на третій, а тому  $p_{43} = 1$ . Розібравши всі можливі варіанти станів системи, отримуємо

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де елемент матриці  $p_{23} = 0,4$ , оскільки з другого вузла на третій (вправо) частинка може перейти з ймовірністю 0,4. Елемент  $p_{33} = 0$ , так як внаслідок поштовху частинка не може залишитись на місці (на третьому вузлі).

### ***Методичні поради щодо вивчення теми***

Побудова матриць переходу для однорідних ланцюгів Маркова є процесом не складним, оскільки вимагає тільки розуміння умов тієї чи іншої задачі. При побудові кожної наступної матриці переходу важливо враховувати, у якому стані перебувала система на кроці попередньому (всі решта кроків не мають жодного значення, оскільки вони враховані в цьому попередньому стані) і яким чином вона могла потрапити в цей стан. Важливим моментом є те, що сума ймовірностей які знаходяться в рядочках матриць  $\pi_2, \pi_3$  і т. д., вже не буде рівною одиниці, оскільки після попередніх кроків система не може перебувати в довільному стані  $i$ , тим більше, перейти в довільний стан.

## **10. ПЕРВИННЕ ОПРАЦЮВАННЯ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ**

*Керування масовими процесами чи вплив на їх перебіг вимагають, безумовно, необхідного знання законів, яким вони підкоряються. Причому, важливими є не тільки закони за якими діє кожен з учасників масового процесу, а й закони, притаманні лише великій сукупності об'єктів. Встановленням останніх і займається математична статистика. Основна її задача полягає в тому, щоб на основі даних, отриманих при вивченні певної підмножини, зробити висновок про*

властивості всієї множини однорідних об'єктів. У зв'язку з цим виникає логічне запитання: чому не досліджувати всю сукупність? Таке дослідження дало б найповнішу інформацію про кількісну чи якісну ознаку. Найпоширенішими причинами цього є: дуже велика кількість елементів, які необхідно досліджувати; інколи перевірка елемента може приводити до його знищення; перевірка всієї сукупності вимагає великих матеріальних та фізичних затрат. Ці причини в сукупності зумовлюють обмеження множини досліджуваних елементів, а також накладають ряд інших задач, таких як: організація способу відбору елементів, розробка методів аналізу, які б дали найточнішу та найповнішу інформацію про всю сукупність.

### **Базові поняття та терміни**

**Означення.** *Генеральною сукупністю* називають всю сукупність елементів, які досліджуються.

**Означення.** *Вибірковою сукупністю* або *вибіркою*, називають сукупність випадково вибраних із генеральної сукупності елементів, для дослідження її якісної чи кількісної ознаки.

**Означення.** *Об'ємом генеральної сукупності* називають кількість елементів цієї сукупності. *Об'ємом вибірки* називають кількість випадково відібраних елементів вибіркової сукупності.

Первинною обробкою даних є побудова **статистичного ряду**, у якому перелічуються всі члени вибірки та відповідні їм значення ознаки, що досліджується.

Наприклад, спостереження величини врожаю на 5 дослідних ділянках може бути представлена таким статистичним рядом:

$N$	1	2	3	4	5
$X$	18,5	20,6	15,4	13,2	22

У першому рядку перелічені всі члени сукупності, тобто номери ділянок, а в другому – відповідні їм значення досліджуваної ознаки (урожай у центнерах з одного га).

Розрізняють повторні та неповторні вибірки. **Повторною** називають вибірку, при якій відібраний елемент повертається до генеральної сукупності перед



відбором іншого елемента. У випадку *безповторної* вибірки взятий з генеральної сукупності елемент до неї вже не повертається. Найчастіше використовуються безповторні вибірки.

Незважаючи на те, що кожна вибірка є випадковою, існує ряд методів відбору елементів генеральної сукупності, кожен з яких має свою сферу застосування.

*Типовим* називають відбір, при якому об'єкти відбираються не з усієї генеральної сукупності, а лише з її типових частин. Такий метод відбору доцільно застосовувати в тих випадках, коли всі об'єкти генеральної сукупності є однорідними, проте природа їх походження різна. Прикладом може бути генеральна сукупність, складена з однакових деталей, які виготовлялися на різних станках.

В основі *механічного відбору* лежить поділ генеральної сукупності на частини, кількість яких рівна кількості об'єктів майбутньої вибірки. Вибірка утворюється шляхом відбору одного об'єкта із кожної з утворених частин генеральної сукупності. Наприклад, якщо необхідно перевірити 20% об'єктів генеральної сукупності, то до вибірки потрапляє кожен п'ятий елемент.

*Серійним* називають такий відбір, при якому об'єкти з генеральної сукупності вибираються не по одному, а серіями. Даний метод відбору використовують у випадку, коли ознака, що досліджується, мало змінюється в різних серіях.

Ще одним поширеним методом відбору є *комбінований*. Згідно з цим методом, спочатку всю генеральну сукупність поділяють на серії однакового об'єму, потім випадковим чином обирають кілька серій і, нарешті, з кожної серії беруть випадкові об'єкти.

Таким чином, первинним кроком статистичного дослідження є збір даних, які об'єднуються в генеральну сукупність та визначення ознаки, яка буде предметом дослідження. Наступним кроком є вибір найбільш оптимального методу відбору вибіркової сукупності з генеральної, тобто побудова статистичного розподілу вибірки.

Нехай із генеральної сукупності зроблено вибірку об'єктів  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (які будемо називати варіантами) об'єму  $n$  для вивчення ознаки  $X$ . Тобто  $x_1, x_2, \dots, x_n \in$  *варіантами ознаки*  $X$ . Набір таких варіант утворює *ряд варіант*, який потребує упорядкування, що значно спростить процес його дослідження. Якщо всі варіанти вибірки впорядкувати в зростаючому чи спадному порядку, то ряд варіант перетвориться на *варіаційний ряд*.

Оскільки в ролі ознаки  $X$  може виступати будь-який вимір (метри, кілограми, літри, гектари тощо), то серед відібраних варіант можуть трапитись однакові. Якщо у вибірці з  $n$  варіант ознака  $X$  прийняла значення  $x_1$  -  $n_1$  рази, значення  $x_2$  -  $n_2$  рази, ..., значення  $x_m$  -  $n_m$  рази, то числа  $n_1, n_2, \dots, n_m$ , які вказують скільки разів зустрічається в ряді розподілу та чи інша варіанта, називаються *частотами*, а ряд, складений з таких чисел, – *рядом частот*. Зрозуміло, що сума всіх частот повинна дорівнювати об'єму вибірки. Таким чином, ми підійшли до поняття статистичного розподілу вибірки.

**Означення.** *Статистичним розподілом вибірки називається таблиця, яка встановлює зв'язок між рядом варіант (зростаючим чи спадним) та відповідними їм частотами:*

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_m$
$n_i$	$n_1$	$n_2$	...	$n_m$

де  $n$  – об'єм вибірки, причому  $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ .

Такий статистичний розподіл називається незгрупованим розподілом варіант. Проте, інколи, для спрощення (наприклад, коли кількість варіант вибірки є достатньо великою), доцільно провести згрупування варіант: воно проводиться шляхом поділу всієї вибіркової сукупності варіант на *класи*, довжина яких може бути як однаковою, так і різною. Для цього, спочатку шукають *розмах варіант*:

$$R = x_{\max} - x_{\min},$$

який характеризує довжину інтервалу, на якому знаходяться всі значення  $x_i$ , а потім ділять його на відрізки довільної довжини, кількість яких і буде кількістю класів. Для отримання більш точних результатів дослідження вибірки на практиці

число класів беруть  $k \geq 6$ . Після цього, у статистичному розподілі вибірки будуть фігурувати вже не варіанти, а класи (інтервали), і такий розподіл вже буде називатися згрупованим.

Після групування варіант необхідно згрупувати і відповідні їм частоти. Для цього потрібно порахувати, скільки варіант попало в той чи інший клас (якщо якась варіанта знаходиться на межі класу, то її відносять до класу, що є наступним після того, де вона перший раз зустрілася) та додати всі частоти, що їм відповідають. Отримані частоти будуть утворювати згрупований ряд частот.

**Означення.** Відношення частоти  $n_i$  варіанти  $x_i$  до об'єму вибірки  $n$  називається **відносною частотою** і позначається:

$$W_i = \frac{n_i}{n}.$$

Сума всіх відносних частот дорівнює одиниці  $\sum_{i=1}^m W_i = 1$ .

**Означення.** Емпіричною функцією розподілу називають функцію  $F^*(x)$ , яка визначає для кожного значення  $x$  відносну частоту події  $X < x$ :

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

де  $n_x$  – кількість варіант, які менші за  $x$ ,  $n$  – об'єм вибірки.

Емпірична функція розподілу  $F^*(x)$  міститься в межах  $[0,1]$  і є функцією зростаючою. Важливо знати, що  $F^*(x_{\min})=0$ ,  $F^*(x_{\max})=1$ .

■ **Приклад.** Задано статистичний ряд розподілу вибірки

$x_i$	2	5	7	9	11
$n_i$	23	15	20	17	25

Побудувати статистичний ряд відносних частот  $W_i$  та емпіричну функцію  $F^*(x)$ .

### **Розв'язування**

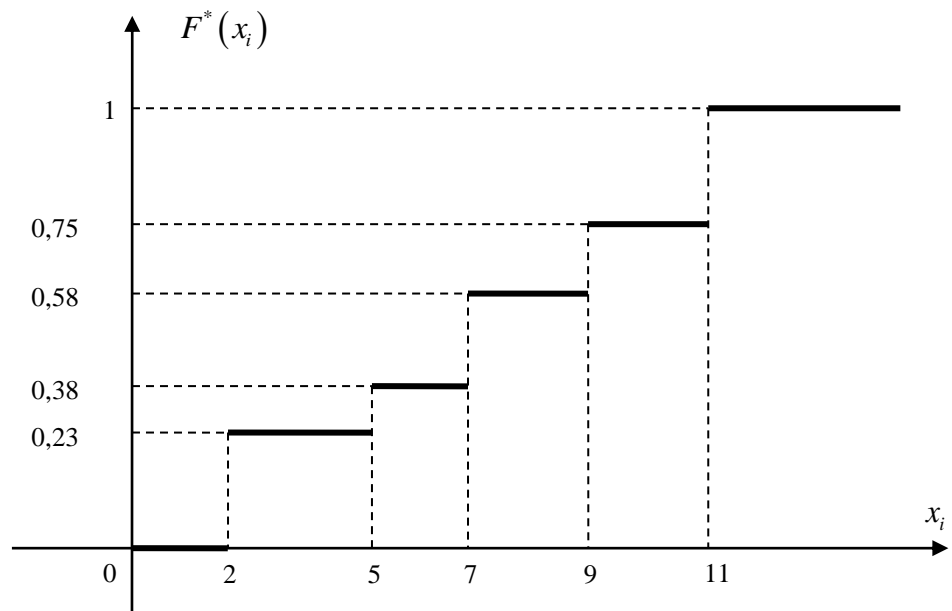
Для побудови ряду відносних частот необхідно знайти відносні частоти для кожної з варіант. Оскільки об'єм нашої вибірки рівний  $n=100$ , то ряд виглядатиме так:

$x_i$	2	5	7	9	11
$W_i$	$\frac{23}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{25}{100}$

Знайдемо всі значення емпіричної функції розподілу  $F^*(2)=0$ , оскільки наша ознака  $X$  не має жодного значення, яке би було меншим за 2.  $F^*(5)=\frac{23}{100}=0,23$ , оскільки тільки значення  $x_i=2$  є меншим за 5.  $F^*(7)=\frac{23+15}{100}=\frac{38}{100}=0,38$ , так як тільки два значення  $x_1=2$  та  $x_2=5$  є меншими за 7, а тому в чисельнику наявна сума відповідних їм частот. За аналогією потрібно визначати всі інші значення емпіричної функції розподілу, яка в кінцевому результаті виглядатиме так:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 2 \\ 0,23; & 2 < x \leq 5 \\ 0,38; & 5 < x \leq 7 \\ 0,58; & 7 < x \leq 9 \\ 0,75; & 9 < x \leq 11 \\ 1; & x > 11 \end{cases}$$

Якщо на координатній площині по осі ОХ відкласти всі значення варіант  $x_i$ , а по осі ОУ – відповідні їм значення функції розподілу  $F^*(x_i)$ , то отримаємо її графік:



Що стосується згрупованого розподілу, то знайшовши розмах варіант  $R=11-2=9$  та поділивши його на 4 класи шириною  $h=2,25$ , отримаємо один із варіантів згрупованого статистичного ряду:

$x_i$	(2;4,5)	(4,25;6,5)	(6,5;8,75)	(8,75;11)
$n_i$	23	15	20	42

### ***Методичні поради щодо вивчення теми***

Узагальнюючи вищесказане, можна виділити три етапи побудови статистичного ряду розподілу вибіркової сукупності: на першому етапі проводиться збір даних, тобто утворення генеральної сукупності об'єктів та визначення ознаки  $X$ , яку потрібно досліджувати; другий етап передбачає вибір методу відбору об'єктів з генеральної сукупності для отримання вибірки; на третьому етапі проводиться впорядкування вибірових елементів (групування, створення ряду частот, обчислення відносних частот, побудова емпіричної функції розподілу і т. д.), тобто перетворення таблиці розподілу варіант на статистичний ряд розподілу. Дотримання даної методики дозволить створити вибірку сукупність, яка буде найбільш оптимально підготовлена для її безпосереднього дослідження.

## **11. СТАТИСТИЧНЕ ТА ІНТЕРВАЛЬНЕ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ**

*Іноді трапляється так, що з деяких міркувань вдається встановити закон розподілу генеральної сукупності. Тоді для повної його характеристики достатньо визначити лише параметри, які його повністю визначають. Наприклад, якщо відомо, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, то для його визначення достатньо знати математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення даної генеральної сукупності (як відомо, ці два параметри повністю визначають даний закон). Оскільки, як правило, генеральна сукупність містить досить багато об'єктів, то це практично унеможливує отримання точних значень шуканих параметрів. Проте, якщо дані параметри шукати на основі вибірок, відібраних з генеральної сукупності, то за допомогою таких вибірових числових характеристик можна оцінити загальні параметри генеральної сукупності.*

### **Базові поняття та терміни**

Для оцінки параметрів генеральної сукупності необхідно вміти обчислювати вибіркові числові характеристики. Розглянемо їх.

**Означення.** *Вибірковою середньою  $\bar{x}_B$  називається число, обчислене за формулою:*

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i x_i,$$

де  $n$  – об'єм вибірки,  $x_i$  – варіанти вибірки,  $n_i$  – відповідні їм частоти,  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

Вибіркова середня є аналогом математичного сподівання і для кожної відібраної вибірки може приймати різні значення. Дана вибіркова характеристика має ряд простих властивостей [2, с.223–224].

**Означення.** *Вибірковою дисперсією  $D_B$  називається середня квадратів відхилення варіант вибірки від вибіркової середньої з врахуванням відповідних відносних частот і обчислюється за формулою:*

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i (x_i - \bar{x}_B)^2.$$

**Означення.** *Вибірковим середньоквадратичним відхиленням  $\sigma_B$  називається корінь з вибіркової дисперсії:*

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

**Зауваження.** Якщо об'єм вибірки  $n < 30$ , тобто містить не більше 30 елементів, то обчислену вибіркову дисперсію треба виправляти. Виправлена вибіркова дисперсія  $s^2$  шукається так:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B.$$

Тоді виправлене середньоквадратичне відхилення  $s$  буде коренем з виправленої дисперсії і шукатиметься за формулою

$$s = \sqrt{s^2}.$$

Таким чином, для кожної вибірки об'єму  $n$ , вибраної з досліджуваної генеральної сукупності, ми отримуємо певні значення вибіркових характеристик:  $\bar{x}_B$ ,  $D_B$ ,  $\sigma_B$ . Оскільки параметри будь-якого закону можна вказати через дані

числові характеристики, то, маючи кілька значень даних вибірових характеристик, можна оцінити параметри закону, за яким розподілена генеральна сукупність. Така оцінка параметрів розподілу називається **точковою оцінкою**.

■ **Приклад.** Вибірка задана таблицею. Знайти вибірові характеристики.

$x_i$	2	5	6	10
$n_i$	24	14	30	32

### **Розв'язування**

Об'єм нашої вибірки рівний  $n = 24 + 14 + 30 + 32 = 100$ . Знайдемо вибірову середню, вибірову дисперсію та вибірове середньоквадратичне відхилення:

$$\bar{x}_B = \frac{2 \cdot 24 + 5 \cdot 14 + 6 \cdot 30 + 10 \cdot 32}{100} = \frac{48 + 70 + 180 + 320}{100} = \frac{618}{100} = 6,18$$

$$D_B = \frac{(2 - 6,18)^2 \cdot 24 + (5 - 6,18)^2 \cdot 14 + (6 - 6,18)^2 \cdot 30 + (10 - 6,18)^2 \cdot 32}{100} = 9,07$$

$$\sigma_B = \sqrt{9,07} = 3,01.$$

Як бачимо, точкові оцінки – це оцінки, які визначаються одним числом. Наприклад, вибірова середня  $\bar{x}_B$  є точковою оцінкою для середньої генеральної сукупності. Оскільки вибірка отримується випадковим чином, то і обчислені числові характеристики даної є величинами теж випадковими, а тому невідомо, з якою точністю вони оцінять той чи інший параметр генеральної сукупності. При великих об'ємах вибірки, точкові оцінки дають прийнятну, з практичної точки зору, точність, проте, у випадку, коли об'єм вибірки малий, виникають значні похибки, які не дозволяють достатньо точно оцінити характеристики генеральної сукупності.

**Означення:** *Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу.*

За допомогою інтервальних оцінок шукають не числове значення оцінюваного параметру, а інтервал, у межах якого знаходиться його можливе значення. Застосовуючи інтервальну оцінку можна встановити її **точність** та **надійність**.

Нехай за даними вибірки знайдена оцінка  $\theta^*$  невідомого параметра  $\theta$ .

**Означення.** *Якщо справедлива нерівність  $|\theta - \theta^*| < \delta$ , то число  $\delta$  характеризує точність оцінки  $\theta^*$ . Чим меншою буде різниця  $\theta - \theta^*$ , тим меншим буде число  $\delta$  і тим точнішою буде оцінка.*

Категорично стверджувати, що  $|\theta - \theta^*| < \delta$  не можна, бо параметр  $\theta$  невідомий. Виконання даної нерівності можливе тільки з певною ймовірністю.

**Означення.** Ймовірність  $\gamma$  того, що виконується рівність  $|\theta - \theta^*| < \delta$ , називається **надійністю оцінки**  $\theta^*$

$$\gamma = P(|\theta - \theta^*| < \delta)$$

Надійність оцінки  $\gamma$  задається наперед, і найчастіше є рівною 0,95 або 0,99.

**Означення.** Інтервал  $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$  називають **довірчим**, якщо він покриває невідомий параметр  $\theta$  із заданою надійністю  $\gamma$ . Кінці такого інтервалу є величинами випадковими, оскільки надійність оцінки визначає її точність.

Для більшості параметрів розподілу довірчі інтервали вже відомі. Розглянемо довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу.

Нормальний закон повністю визначається двома параметрами: математичним сподіванням  $a$  та середньоквадратичним відхиленням  $\sigma$ . Нехай відомо, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом розподілу і є відомим один з параметрів – середньоквадратичне відхилення  $\sigma$ . Тоді довірчий інтервал

$$\left( x_B - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}; x_B + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

з надійністю  $\gamma$  покриває невідомий параметр  $a$  генеральної сукупності. Із загального запису даного довірчого інтервалу випливає, що точність такої оцінки рівна

$$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}. \quad (2.11.1)$$

Число  $t$  визначається з рівності  $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ , де  $\Phi(t)$  – інтегральна функція Лапласа, всі значення якої протабульовані.

**Зауваження.** З формули (2.11.1) випливає, що при збільшенні об'єму вибірки  $n$  зменшується дріб (2.11.1), а отже зменшується число  $\delta$ . Це означає, що чим більший об'єм вибірки, тим точніша оцінка. З іншого боку, якщо збільшувати надійність  $\gamma$ , то разом з нею буде рости значення функції Лапласа, а це збільшує



число  $t$  і, як наслідок, – точність  $\delta$ . **Отже, збільшення надійності оцінки веде до зменшення її точності.**

■ **Приклад.** Відомо, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом з параметром  $\sigma = 3$ . Зроблено вибірку об'єму  $n = 50$ . З надійністю  $\gamma = 0,98$  знайти довірчий інтервал для оцінки іншого невідомого параметра  $a$  цього розподілу та обчислити точність такої оцінки.

### **Розв'язування**

Оскільки за умовою задачі надійність оцінки рівна 0,98, то з рівності

$$\Phi(t) = \frac{0,98}{2} = 0,49$$

за допомогою таблиці значень інтегральної функції Лапласа знаходимо  $t = 2,35$ .

Використовуючи отримане значення  $t$  шукаємо точність оцінки

$$\delta = \frac{2,35 \cdot 3}{\sqrt{50}} = \frac{7,05}{7,07} = 0,99$$

та довірчий інтервал  $(\bar{x}_B - 0,99; \bar{x}_B + 0,99)$ .

Отриманий результат показує, що якщо обчислене значення вибіркової середньої буде рівним, наприклад,  $\bar{x}_B = 3,1$ , то інтервал  $(2,11; 4,09)$  з надійністю 98% покриває  $a$ . Точність такої оцінки рівна 0,99.

### **Методичні поради для вивчення теми**

У цій темі розглядалися два типи статистичних оцінок параметрів розподілу генеральної сукупності – точкові та інтервальні. Підхід кожної з них до розв'язування даної проблеми є різним, проте вони мають спільний принцип – можливість на основі дослідження вибіркової сукупності зробити висновок про множину елементів, з якої ці сукупності були випадковим чином відібрані. Точкові оцінки визначаються одним числом, яке отримується на основі обчислень числових характеристик вибірок, взятих з генеральної сукупності елементів, і є тим точнішими, чим більшим є об'єм цих вибірок. Інтервальні оцінки параметрів розподілу генеральної сукупності визначаються двома числами – кінцями інтервалу, в якому знаходиться реальне значення оцінюваного параметру. Такі оцінки працюють і для вибірок малого об'єму, оскільки інтервали будуються з

наперед заданою надійністю і точністю, тому, важливим моментом при вивченні статистичних оцінок є уміння застосувати найоптимальніше оцінювання, яке в конкретній задачі дасть найбільш точний результат.

## **12. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ**

*Статистичні гіпотези застосовуються як для визначення закону, за яким розподілена генеральна сукупність, так і для визначення ймовірних значень параметрів цього розподілу (якщо розподіл є відомим). Принцип застосування статистичних гіпотез є простим: спочатку, на основі деяких міркувань, висувається гіпотетичне припущення, яке потім, за допомогою спеціальних критеріїв, перевіряється. Кінцевим результатом є або прийняття гіпотези або її спростування (відхилення). Вся процедура проводиться на випадкових вибіркових сукупностях, а тому і результат є випадковим, а, отже, може не відобразити дійсності. Для усунення цієї проблеми існує багато способів, окремі з яких будуть розглянуті нижче.*

### **Базові поняття та терміни**

**Означення.** *Статистичними називають гіпотези про вигляд розподілу генеральної сукупності або про параметри відомих розподілів.*

Прикладом статистичної гіпотези може бути таке припущення: "генеральна сукупність розподілена за нормальним законом" або "дисперсії двох генеральних сукупностей, які розподілені за нормальним законом, рівні між собою". Природно, що поряд з висунутою гіпотезою має право на існування і протилежне їй твердження – гіпотеза, що її спростовує. Такі гіпотези слід відрізнити.

**Означення.** *Основною (нулевою) називають припущену гіпотезу, яку позначають  $H_0$ .*

**Означення.** *Альтернативною (конкурентною) називають гіпотезу, що суперечить основній і яку позначають  $H_1$ .*

Наприклад, якщо  $H_0$  – "генеральна сукупність розподілена за нормальним законом", то  $H_1$  – "генеральна сукупність, не розподілена за нормальним законом".

Висунута гіпотеза потребує перевірки. Оскільки, як вже зазначалось, перевірка здійснюється за даними випадкової вибірки, то є ризик зробити хибний висновок про основну гіпотезу. У зв'язку з цим, виникають похибки 1-го та 2-го роду.

**Означення.** Якщо за висновком буде відкинута правильна гіпотеза, то кажуть, що здійснено **похибку 1-го роду**.

**Означення.** Якщо за висновком буде прийнята неправильна гіпотеза, то кажуть, що здійснено **похибку 2-го роду**.

Як правило, на практиці намагаються уникати виникнення похибок 1-го роду. Цьому, певною мірою, сприяє так званий рівень значущості.

**Означення.** Ймовірність здійснення похибки першого роду позначають  $\alpha$  і називають **рівнем значущості**.

Зрозуміло, що це число задається наперед і, враховуючи те, що це ймовірність, повинно бути достатньо малим. Найчастіше рівень значущості приймають рівним 0,05. Це означає, що в п'яти випадках зі ста ризикуємо отримати похибку 1-го роду, тобто відкинути правильну гіпотезу (потрібно розуміти, що правильною може бути як і висунута нами гіпотеза, так і альтернативна їй).

Формулювання основної гіпотези визначає критерій, за яким вона перевірятиметься. Для багатьох найпоширеніших гіпотез вже існують спеціальні критерії, сукупність значень яких є протабульованою.

**Означення.** **Критичною областю** називають сукупність значень критерію, при яких основна гіпотеза відхиляється.

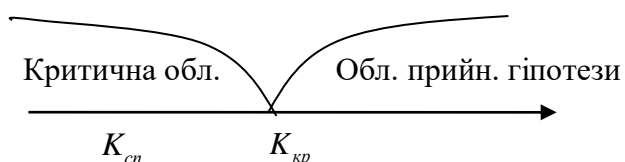
**Означення.** **Областю прийняття гіпотези** називають множину значень критерію, при яких основну гіпотезу приймають.

Якщо відкласти множину всіх значень критерію на числовій осі, то повинні існувати точки, які відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези. Такі точки  $K_{кр}$  називаються **критичними**. Відшукування таких точок є основним завданням при перевірці статистичних гіпотез.

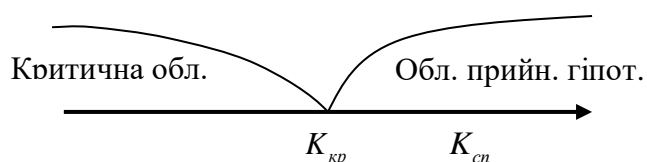
Отже, алгоритм перевірки статистичних гіпотез можна сформулювати так:

- формулювання основної та альтернативної гіпотези;
- вибір правильного критерію залежно від змісту гіпотези,;
- визначення критичних точок  $K_{кр}$  та критичної області критерію;
- обчислення спостереженого значення критерію  $K_{сп}$  на основі відібраної вибіркової сукупності;
- порівняння спостереженого значення з критичним.

Якщо при порівнянні значення критерію, отриманого на основі вибірки, із критичним значенням даного критерію, перше попаде в критичну область (мал.1), то це означає, що основну гіпотезу потрібно відхилити. Якщо ж спостережене значення попадає у область прийняття гіпотези (мал.2) – основна гіпотеза приймається.



*Мал. 1*



*Мал. 2*

Розглянемо приклад перевірки статистичної гіпотези про те, що "генеральна сукупність розподілена за нормальним законом". Для перевірки такої гіпотези застосовують критерій узгодження Пірсона або критерій  $\chi^2$ .

■ **Приклад.** При рівні значущості  $\alpha = 0,05$  перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо відомі емпіричні та теоретичні частоти

$n_k$	6	13	38	74	106	85	30	14
$n'_k$	3	14	42	82	99	76	37	13

### **Розв'язування**

У цьому прикладі теоретичні частоти  $n'_k$  є заданими, проте це не завжди може бути. Якщо за умовою задачі задана тільки вибірка з варіантами  $x_k$  та емпіричними частотами  $n_k$ , то для відшукування теоретичних частот існують формули.

Першим кроком при перевірці гіпотези про нормальний розподіл є обчислення критичного значення критерію Пірсона –  $\chi_{кр}^2(\alpha, k)$ . Воно залежить від двох параметрів:  $\alpha$  – рівня значущості (в нашому випадку  $\alpha=0,05$ ) та  $k$  – кількості степенів вільності, який обчислюється за формулою  $k=m-3$ , де  $m$  – кількість варіант вибірки. Для нашої задачі  $k=8-3=5$ .

За двома параметрами  $\alpha$  та  $k$  у таблиці значень критерію  $\chi^2$  знаходимо  $\chi_{кр}^2=11,1$ .

Наступним кроком є обчислення спостереженого значення критерію Пірсона –  $\chi_{сн}^2$ . Для його відшукування використовується наступна таблиця.

$n_k$	$n'_k$	$n_k - n'_k$	$(n_k - n'_k)^2$	$\frac{(n_k - n'_k)^2}{n'_k}$
6	3	-3	9	3
13	14	-1	1	0,07
38	42	-4	16	0,38
74	82	-8	64	0,78
106	99	7	49	0,49
85	76	9	81	1,07
30	37	-7	49	1,32
14	13	1	1	0,08
				$\chi_{сн}^2 = \sum \frac{(n_k - n'_k)^2}{n'_k} = 7,19$

Отже, спостережене значення критерію Пірсона рівне 7,19.

Нарешті, потрібно порівняти спостережене значення з критичним, з використанням наступного правила: якщо спостережене значення критерію Пірсона є меншим за його критичне значення, то гіпотезу  $H_0$  треба прийняти, оскільки в протилежному випадку гіпотеза відхиляється. Як бачимо, наше спостережене значення  $\chi_{сн}^2=7,19$  є меншим за відповідне критичне  $\chi_{кр}^2=11,1$ , а це означає, що гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності треба прийняти.

### **Методичні поради щодо вивчення теми**

При статистичній перевірці гіпотез важливим є правильний вибір критерію перевірки та знання і розуміння алгоритму його застосування. Вже зазначалось, що

отриманий результат під час перевірки гіпотези має випадковий характер, а тому висновок про правильність чи неправильність висунутої гіпотези некоректно робити на основі лише однієї вибірки, яка була досліджена.

Не дивлячись на те, що надійність отриманого результату з самого початку є достатньо великою, всеодно існує ризик отримати похибку, тобто прийняти хибне рішення. Тому для того, щоб бути більш-менш впевненим в отриманому результаті, потрібно опрацювати кілька вибірових сукупностей. Підтвердження основної гіпотези на основі кількох вибірок дозволить з більшою впевненістю говорити про вірність чи хибність того чи іншого припущення.

### **13. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ РЕГРЕСІЇ**

*Даний розділ математичної статистики займається встановленням функціональних залежностей між випадковими величинами. Під функціональною залежністю розуміється деяке рівняння, яке би пов'язувало випадкові величини. Визначення такої рівності дало б змогу, маючи значення однієї випадкової величини, отримувати значення іншої (звичайно децю наближеної) і навпаки. Існує багато економічних ситуацій, вирішення яких потребує такого підходу. Наприклад, відомо, що збільшення об'єму виробництва продукції веде до зменшення її собівартості. Встановлення функціональної залежності між цими двома ознаками дало б змогу контролювати ріст собівартості. Такі залежності називаються регресійними рівняннями.*

#### **Базові поняття та терміни**

Нехай внаслідок  $n$  незалежних випробувань одержано варіанти ознак  $Y$  та  $X$

Номери випробувань	1	2	...	$k$	...	$n$
$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$	...	$x_n$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_k$	...	$y_n$

Якщо між цими ознаками існує залежність, тобто ознака  $Y$  є функцією від ознаки  $X$ , то така залежність буде мати наступний вигляд:

$$Y = f(X, a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Визначення параметрів  $a_1, a_2, \dots, a_n$  дасть змогу отримати таку залежність. Найпоширенішим способом оцінки цих параметрів (саме оцінки, оскільки всі обчислення знову ж таки проводяться на основі вибірок) є **метод найменших квадратів**. Основна його ідея полягає в тому, що найімовірнішими значеннями шуканих параметрів  $a_1, a_2, \dots, a_n$  будуть ті, при яких сума квадратів різниці між фактичними значеннями  $y_k$  та цими ж значеннями, знайденими з шуканого невідомого рівняння, буде найменшою. Іншими словами, найточнішими значеннями будуть ті значення  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , які надають мінімуму функції:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_k - f(x_k, a_1, a_2, \dots, a_n))^2,$$

а для цього повинна виконуватись рівність

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0.$$

Розглянемо найпростіший випадок функціональної залежності між двома ознаками – лінійної функції. Нехай між випадковими величинами існує лінійна функціональна залежність:

$$Y = aX + b,$$

параметри  $a$  та  $b$  якої є невідомими. Відшукання даних двох параметрів є рівносильним розв'язанню наступної системи:

$$\begin{cases} a \sum_{k=1}^n x_k + nb = \sum_{i=1}^n y_k \\ a \sum_{i=1}^n x_k^2 + b \sum_{i=1}^n x_k = \sum_{i=1}^n x_k y_k \end{cases} \quad (13.1)$$

Після обчислення всіх сум, що фігурують в системі, вона міститиме два лінійні рівняння з двома невідомими. Розв'язавши її відносно невідомих  $a$  та  $b$ , отримаємо значення параметрів лінійного рівняння регресії  $a = a_0, b = b_0$ .

■ **Приклад.** Відомо, що між двома величинами  $X$  та  $Y$  існує лінійна залежність. За допомогою методу найменших квадратів знайти ймовірні значення невідомих параметрів цієї залежності та записати її аналітичний вигляд:

$X$	-1	2	3	4	6
$Y$	0,5	0,7	1,2	3,4	5,6

### ***Розв'язання***

На основі даних таблиці знайдемо всі суми, що фігурують у системі (13.1):

$$\sum_{i=1}^5 x_k = -1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 14 \quad \sum_{i=1}^5 y_k = 0,5 + 0,7 + 1,2 + 3,4 + 5,6 = 11,4$$

$$\sum_{i=1}^5 x_k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 36 = 66 \quad \sum_{i=1}^5 x_k y_k = -1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,7 + 3 \cdot 1,2 + 4 \cdot 3,4 + 6 \cdot 5,6 = 51,7$$

Підставимо отримані суми в систему (2.13.1) і, врахувавши, що об'єм нашої вибірки рівний  $n = 5$ , матимемо

$$\begin{cases} 14a + 5b = 11,4 \\ 66a + 14b = 51,7 \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему, отримаємо значення параметрів рівняння регресії

$$a = 0,74, \quad b = 0,21.$$

Отже, між випадковими величинами  $Y$  та  $X$  існує лінійна залежність вигляду

$$Y = 0,71X + 0,21.$$

Перевіримо, на скільки точний результат дає таке рівняння, підставивши в нього значення ознаки  $x_k = 4$ , тоді  $Y(4) = 0,74 \cdot 4 + 0,21 = 2,96 + 0,21 = 3,17$ . Бачимо, що значення  $Y(4) = 3,17$ , отримане зі знайденого рівняння, є близьким до його табличного значення  $Y(4) = 3,4$ , проте не достатньо точним. Це зумовлено тим, що рівняння регресії було знайдене на основі вибірки малого об'єму (всього 5 варіант). Рівняння дасть точніший результат, чим більший об'єм буде у вибірки, на основі якої дане рівняння будується.

Крім лінійної залежності існують також параболічні рівняння регресії, гіперболічні, експоненціальні і т. д. Методика їх визначення базується на тому ж принципі, що й для лінійних залежностей, проте зрозуміло, що невідомих параметрів, а отже, і рівнянь, система (13.1) буде мати більше.

### ***Методичні поради щодо вивчення теми***

Перш ніж приступати до визначення функціональної залежності між випадковими величинами (ознаками), необхідно хоча б приблизно оцінити, який саме вид регресійного рівняння між ними існує. Це важливо тому, що, якщо ознаку  $X$  та  $Y$  пов'язує, наприклад, параболічна функціональна залежність



(рівняння регресії вигляду  $Y = aX^2 + bX + c$ ), то пошук між ними лінійного зв'язку виду  $Y = aX + b$  немає змісту. На певні міркування щодо виду регресійного рівняння може навести побудова точкової діаграми  $(x_k, y_k)$ . Що стосується похибки значень, яку буде давати знайдене рівняння зв'язку, то, як вже зазначалось, вона залежить від кількості значень вибірки, яку взято для дослідження.

#### **14. ЕЛЕМЕНТИ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ**

*При аналізі кількох генеральних сукупностей, розподілених за нормальним законом з відомими дисперсіями, виникає потреба в оцінці інших числових характеристик. Дана проблема вирішується за допомогою уже знайомих нам статистичних гіпотез і дисперсійного аналізу генеральних сукупностей. Критерій, який використовується при перевірці, називається критерієм Фішера.*

##### **Базові поняття та терміни**

Нехай є  $N$  нормально розподілених генеральних сукупностей з рівними дисперсіями та з різними математичними сподіваннями. Візьмемо з кожної генеральної сукупності вибірку об'єму  $n_i$ , де  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . Зрозуміло, що  $\sum_{i=1}^N n_i = n$  – це об'єм усієї вибірки (зробленої зі всіх генеральних сукупностей).

Якщо позначити через  $j$  номер варіанти вибірки, то середньоарифметична кожної з  $N$  вибірок буде обчислюватись за формулою:

$$x_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \quad (14.1)$$

а середня всієї вибірки буде рівною:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i n_i. \quad (14.2)$$

При заданому рівні значущості потрібно перевірити гіпотезу **про рівність математичних сподівань цих генеральних сукупностей**:

$$H_0 : a_1 = a_2 = \dots = a_N.$$

Для перевірки цієї гіпотези використовується критерій Фішера, спостережене значення  $F_{cn}$  якого обчислюється за даними вибірки на основі формули:

$$F_{cn} = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\frac{1}{n-N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2}, \quad (14.3)$$

а критичне  $F_{кр}(N-1, n-N, \alpha)$ , яке залежить від трьох параметрів: рівня значущості  $\alpha$  та степенів вільності  $N-1$  і  $n-N$ , за допомогою таблиці значень критерію Фішера. Порівняння спостереженого і критичного значення проводиться так:

$$F_{cn} < F_{кр} - \text{гіпотеза } H_0 \text{ приймається,}$$

$$F_{cn} > F_{кр} - \text{гіпотеза } H_0 \text{ відхиляється.}$$

■ **Приклад.** Магазин спеціалізується на продажі трьох видів продукції. На основі проведених досліджень були зібрані дані про вартість трьох проданих видів продукції в окремі дні тижня:

	вівторок	середа	четвер	п'ятниця	субота
1-й вид	10,2	10,8	10,7	13,0	12,0
2-й вид	11,5	9,8	11,5	13,2	11,5
3-й вид	12,0	12,1	12,0	11,5	11,8

Припускаючи нормальний закон розподілу одержаної суми кожного дня та рівність дисперсій, перевірити гіпотезу про рівність математичного сподівання  $H_0: a_1 = a_2 = \dots = a_5$  при рівні значущості  $\alpha = 0,05$ .

### *Розв'язування*

Отже, розглядається п'ять генеральних сукупностей, кожна з яких складається з вартостей проданої продукції за один з п'яти днів –  $N=5$ . Дослідження велися упродовж одного тижня, а тому перший стовпець таблиці – це вибірка з першої генеральної сукупності (вартість продажів за вівторок) об'єму  $n_1=3$ , другий стовпець – друга вибірка і т. д. Таким чином, здійснено 5 вибірок об'єму  $n_i=3$ . Об'єм загальної вибірки рівний  $n=15$ . Знайдемо середньоарифметичні кожної з п'яти вибірок за формулою (14.1), та середню всієї вибірки за формулою (14.2):

$$x_1 = \frac{10,2+11,5+12,0}{3} = 11,2 \quad x_2 = \frac{10,8+9,8+12,1}{3} = 10,8 \quad x_3 = \frac{10,7+11,5+12,0}{3} = 11,4$$

$$x_4 = \frac{13,0+13,2+11,5}{3} = 12,6 \quad x_5 = \frac{12,0+11,5+11,8}{3} = 11,8 \quad \bar{x} = \frac{(11,2+10,8+23,2+12,6)}{5} = 11,6.$$

Отримані значення використаємо для обчислення спостереженого значення критерію Фішера, попередньо знайшовши суми, що фігурують у формулі (14.3):

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = \left[ (11,2 - 11,6)^2 + (10,8 - 11,6)^2 + (11,4 - 11,6)^2 + (12,6 - 11,6)^2 + (11,8 - 11,6)^2 \right] \cdot 3 = 5,64$$

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 (x_{ij} - \bar{x})^2 = (10,2 - 11,6)^2 + (11,5 - 11,6)^2 + (12,0 - 11,6)^2 + (10,8 - 11,6)^2 + \dots = 12,34$$

Підставимо всі отримані суми у формулу (2.14.3)  $F_{cn} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 5,64}{\frac{1}{10} \cdot 12,34} = 1,14$ .

З таблиці значень критерію Фішера знаходимо його критичне значення  $F_{кр}(4,10,0.05) = 3,48$ . Оскільки  $F_{cn} < F_{кр}$ , то нашу гіпотезу  $H_0$  можна прийняти.

### ***Методичні поради щодо вивчення теми***

Дисперсійний аналіз є одним зі складників теорії статистичних гіпотез, а тому його підхід збігається з загальними ідеями перевірки гіпотез. Критерій Фішера не є складним для розуміння і більшою мірою вимагає тільки уважного опрацювання даних вибірки та вміння проводити елементарні обчислення. Знову ж таки, висновок про правильність чи неправильність основної гіпотези при дисперсійному аналізі генеральних сукупностей є точнішим, чим більше вибірових сукупностей буде розглянуто.

### *Список використаних джерел*

1. Бугір М.К. Математика для економістів: посібник. Київ: Видавничий центр "Академія", 2003, 517 с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. Київ: ЦУЛ, 2002. 430 с.
3. Барковський В.В. Вища математика для економістів. Київ: ЦНЛ, 2002. 400с.
4. Волощенко А.Б. Теорія ймовірності та математична статистика. Київ: КНЕУ, 2003. 256 с.
5. Валь О. Д. Теорія ймовірностей... від найпростішого: навчальний посібник. Чернівці.: Книги – ХХІ, 2004. 160 с.
6. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірності та математична статистика. Част.1. К.: КНЕУ, 2001. 304с.
7. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірності та математична статистика. Част.2. К.: КНЕУ, 2001. 336 с.
8. Єрманова О.А. Вища математика. Київ: Ун-т "Україна", 2004. 270 с.
9. Красс М.С. Математика для экономистов. СПб.: Питер, 2004. 464с.
10. Соколенко О.І. Вища математика. Київ: ВЦ "Академія", 2003. 432 с.
11. Рудавський Ю.К. Математичний аналіз. Львів: Політехніка, 2002. 147 с.
12. Юрченко М.О. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика". Одеса: ОНПУ, 2017. 47 с.

13. Юрченко М.О. Конспект лекцій з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122" Комп'ютерні науки та інформаційні технології " Частина 2. Одеса: ОНПУ, 2016. 62с.

**Додаток А**

***Контрольні запитання на ПМК-1***

1. Поняття матриці та її основні види. Дії над матрицями.
2. Поняття мінору та алгебраїчного доповнення до елементів матриці.
3. Поняття рангу матриці та методика його відшукування.
4. Визначник матриці. Правила обчислення визначників 2-го та 3-го порядків.
5. Розклад визначника за елементами рядка чи стовпчика (теорема Лапласа).
6. Поняття оберненої матриці та методика її відшукування.
7. Сумісність та визначеність системи лінійних рівнянь. Критерій сумісності.
8. Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.
9. Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса.
10. Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса.
11. Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом.
12. Поняття вектора. Основні дії над векторами. Скалярний добуток векторів.
13. Види рівняння прямої на площині та в просторі. Взаємне розташування прямих.
14. Поняття кривої  $n$ -го порядку. Рівняння кола, еліпса, гіперболи та параболи.
15. Поняття функції однієї змінної. Область визначення та область значень функції.
16. Складні та прості функції.
17. Границя функції. Основні теореми про границі функції.
18. Поняття розривної функції. Розриви 1-го та 2-го роду.
19. Похідна функції однієї змінної та її геометричний зміст.
20. Основні правила диференціювання функції однієї змінної.

21. Похідна складеної функції.
22. Диференціал функції однієї змінної та правило його відшукування.
23. Формули Тейлора та Маклорена для розкладу довільних функцій на многочлен.
24. Застосування похідної в економічних розрахунках. Поняття граничного ефекту.
25. Еластичність функції та її геометричний зміст.
26. Поняття екстремуму функції однієї змінної. Локальні та глобальні екстремуми.
27. Перше і друге правило відшукування екстремальних точок функції однієї змінної.
28. Розкриття невизначеностей під знаком границі за правилом Лопіталя.

### **Контрольні запитання на ПМК-2**

1. Поняття функції багатьох змінних та її використання в економіці.
2. Частинні похідні 1-го порядку від функції багатьох змінних.
3. Частинні похідні вищих порядків для функції багатьох змінних.
4. Поняття градієнта функції та його геометричний зміст.
5. Поняття екстремальної точки для ФБЗ. Необхідна умова існування екстремуму функції багатьох змінних.
6. Матриця Гессе та її роль при дослідженні функції багатьох змінних на екстремум. Умови мінімуму та максимуму для ФБЗ.
7. Поняття умовного екстремуму ФБЗ.
8. Поняття невизначеного інтегралу. Основні правила інтегрування.
9. Інтегрування частинами у випадку невизначеного інтегралу.
10. Інтегрування підстановкою у випадку невизначеного інтегралу.
11. Поняття визначеного інтегралу, його властивості та геометричний зміст.
12. Формула Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтегралу.
13. Методи інтегрування у випадку визначеного інтегралу.
14. Застосування визначеного інтегралу при обчисленні площ фігур.
15. Поняття невластного інтегралу. Невласні інтеграли 1-го та 2-го родів.
16. Формули трапеції для наближеного обчислення визначеного інтегралу.
17. Формули Сімпсона для наближеного обчислення визначеного інтегралу.
18. Економічний зміст визначеного інтегралу та приклади його практичного застосування.

19. Поняття диференціального рівняння та його розв'язку.
20. Диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремленими змінними. Задача Коші.
21. Лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку. Метод Бернуллі.
22. Використання диференціальних рівнянь при побудові виробничих функцій.
23. Поняття числового ряду та його збіжності. Ознаки Коші.
24. Поняття числового ряду та його збіжності. Ознаки Д'Аламбера.
25. Інтегральна ознака збіжності числових рядів.

### **Контрольні запитання на ПМК-3**

1. Поняття простору та множини елементарних подій. Елементарні операції над подіями.
2. Класичне та геометричне означення ймовірності.
3. Елементи комбінаторики в теорії ймовірностей.
4. Поняття випадкової події. Залежні та незалежні випадкові події. Умовна ймовірність.
5. Оцінка роботи простих систем з допомогою формул теорії ймовірностей.
6. Повна ймовірність.
7. Формула Байєса.
8. Локальна та інтегральна теореми теорії ймовірностей.
9. Схема Бернуллі. Формула Бернуллі.
10. Малоймовірні випадкові події. Формула Пуассона.
11. Поняття потоку подій. Пуассонівський потік подій.
12. Поняття дискретної випадкової величини.
13. Поняття неперервної випадкової величини.
14. Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини. Функція та щільність розподілу НВВ.
15. Числові характеристики дискретної випадкової величини.
16. Числові характеристики неперервної випадкової величини.
17. Біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини.
18. Розподіл ДВВ за Пуассоном.
19. Рівномірний розподіл для НВВ.

20. Нормальний розподіл для НВВ.
21. Розподіл  $\chi^2$  Пірсона для НВВ.
22. Розподіл Фішера для НВВ.
23. Закон розподілу двовимірної випадкової величини.
24. Числові характеристики багатовимірної випадкової величини.
25. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції та його зміст.
26. Граничні теореми теорії ймовірностей. Закон великих чисел.
27. Поняття генеральної сукупності елементів та вибірки. Статистичний розподіл вибірки.
28. Емпірична функція розподілу. Полігон частот та гістограма.
29. Види та класифікація статистичних оцінок.
30. Точкова оцінки параметрів генеральної сукупності.
31. Інтервальні оцінки параметрів розподілу. Побудова довірчого інтервалу.  
Перевірка точності оцінки параметрів розподілу.
32. Поняття статистичної гіпотези та її види. Критерій узгодження Пірсона.
33. Аналіз лінійного статистичного зв'язку економічних даних.
34. Коефіцієнт кореляції для вибірки та генеральної сукупності елементів..
35. Метод найменших квадратів.
36. Проведення дисперсійного аналізу. Критерій Фішера.



**Індивідуальні навчально-дослідні завдання**

Індивідуальні навчально-дослідні завдання є додатковим етапом засвоєння курсу студентами самостійно. В процесі їх виконання і оформлення студент розширює і закріплює одержані теоретичні знання.

Кожне завдання охоплює теми відповідного семестру і складається з кількох задач і прикладів, розв'язування яких потребує також освоєння матеріалу для самостійної роботи. Індивідуальні завдання є однотипними для всіх студентів, однак відрізняються видом заданих функцій, які залежать від значення  $n$ , яке рівне порядковому номеру прізвища студента в загальному журналі. Кожне завдання виконується письмово на стандартних сторінках паперу, які зшиваються в папку, або в учнівському зошиті. Усі сторінки нумеруються. Воно може бути рукописним або надрукованим на комп'ютері через два інтервали. На титульній сторінці слід вказати назву факультету, дисципліни і номер завдання, а також курс, групу, прізвище і ініціали студента.

Індивідуальні завдання повинні бути виконані і здані викладачу (і при необхідності захищені в консультаційні години) не пізніше як за два тижні до початку екзаменаційної сесії.

**Індивідуальне навчально-дослідне завдання №1**  
**Варіант — n**

1. Задана система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (1+n)x_1 - x_2 = 2 \\ (n-2)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - (n-1)x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}, \text{ де } n \text{ — номер варіанту.}$$

**Завдання:**

- з'ясувати чи є задана система сумісною;
  - знайти розв'язки системи методом Жордана-Гаусса;
  - скласти матрицю з коефіцієнтів при невідомих системи та визначити її ранг;
  - знайти обернену матрицю до цієї матриці.
- 

2. Задано функцію  $y = f(x)$  у вигляді

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln(nx)}{n}.$$

**Завдання:**

- обчислити одnobічні границі функції в точці  $x = 1$ ;
  - знайти точки розриву функції, якщо вони існують і визначити характер розриву;
  - дослідити функцію на наявність асимптот та, якщо вони існують, знайти їх рівняння;
  - дослідити функцію методами диференціального числення та побудувати її графік;
  - знайти координати екстремумів функції.
- 

3. Задано рівняння кривої II-го порядку у вигляді

$$\frac{x^2}{(4+n)} - \frac{y^2}{(n+1)^2} = 1.$$

**Завдання:**

- знайти півосі цієї кривої та координати її фокусів;
- знайти рівняння асимптот до цієї кривої.

4. Задана функція  $y = f(x)$  у вигляді

$$f(x) = e^{4x+n}.$$

**Завдання:**

- розкласти функцію по степенях многочлена в заданій точці  $x=1$  використовуючи формулу Тейлора.
- 

5. Вивести з допомогою правила Лопітала першу та другу "важливу границю" в математиці.

---

6. Побудувати матричну модель умовної трьохгалузевої виробничої системи.

---

## Індивідуальне навчально-дослідне завдання №2 Варіант –п

1. Задано функцію багатьох змінних

$$z = x_1^2 + nx_2^2 - x_1 x_2 + (n-5)x_3^2 + x_1 x_3 - 2nx_2^3.$$

**Завдання:**

- знайти частинні похідні першого порядку;
  - записати координати вектора-градієнта даної функції в т.  $M(0,1,3)$ ;
  - знайти частинні похідні другого порядку та обчислити їх в точці  $N(1,1,0)$ ;
  - записати повний диференціал даної функції.
- 

2. Задано функцію двох змінних

$$z = -nx_1^2 + 3x_2^2 - x_1 x_2 + (n-7)x_1 + (n-10)x_2, \text{ та пряму } x_1 + (n-14)x_2 = -1.$$

**Завдання:**

- дослідити дану функцію на звичайний екстремум та знайти її екстремальне значення;
  - дослідити функцію на умовний екстремум та знайти її екстремальне значення;
  - знайти всі множники Лагранжа;
  - перевірити, чи існує для цієї функції сідлова точка.
- 

3. Задано функцію

$$f(x) = \frac{1}{(n-12)x} - \frac{4}{x^2} + 2(n-11).$$

**Завдання:**

- знайти первісну до даної функції;
- проінтегрувати дану функцію на проміжку  $[-1;3]$ ;
- знайти значення вищевказаного інтегралу за допомогою формул трапеції та Сімпсона;
- обчислити невластний інтеграл  $\int_1^{\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + 2 \right) dx$ .

4. Знайти площу фігури, яка утворена лініями:

$$y = nx^2 + 2, \quad y = -2x^2 + (2n-5).$$

5. Задано степеневий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{(k-n)}}{(k+1)n} \cdot x^k.$$

**Завдання:**

- знайти радіус збіжності даного степеневого ряду;
- знайти інтервали збіжності та розбіжності даного степеневого ряду.

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, та відповідну йому задачу Коші:

$$y' + (2n-12)x = e^{(n-16)x}, \quad y(0) = n-15.$$

**Індивідуальне навчально-дослідне завдання №3**  
**Варіант — n**

1. В лотерейній пачці  $(n+10)$  квитків із яких 2 виграшних. Учасник лотереї купляє 5 квитків.

**Завдання:**

- визначити ймовірність того, що виграшним буде хоча б один квиток;
- визначити ймовірність того, що виграшним буде рівно один квиток.

- 
2. Задано закон розподілу дискретних випадкових величин  $X$  і  $Y$  у вигляді таблиці:

$X = x_i$	0	$2+n$	$3+n$	$5+n$
$P_X = p_{x_i}$	0,2	0,1	0,3	0,4

$Y = y_i$	$1+n$	$2+n$	$9+n$
$P_Y = p_{y_i}$	0,1	0,6	0,3

**Завдання:**

- побудувати закон розподілу випадкової величини  $Z = \frac{X}{Y}$ ;
  - обчислити математичне сподівання випадкових величин  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ;
  - обчислити дисперсії  $D(X)$ ,  $D(Y)$ ,  $D(Z)$ .
- 

3. Задано дослідні дані двох величин  $X = x_k$  та  $Y = y_k$ :

$x_k$	$0,5 \cdot n$	$1,5 \cdot n$	$2,5 \cdot n$	$3,5 \cdot n$
$y_k$	1,32	0,81	0,18	-0,46

**Завдання:**

- визначити форму зв'язку між змінними  $X$  та  $Y$ ;
  - використовуючи метод найменших квадратів знайти параметри залежності  $Y = f(x)$ ;
  - обчислити коефіцієнти кореляції та асиметрії вибірок  $x_k$  та  $y_k$ .
4. За даними вибірки об'єму  $(2n+200)$  та відомими теоретичними частотами перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки  $X$  генеральної сукупності, використовуючи критерій Пірсона  $\chi^2$  з рівнем значущості  $\alpha = 0,05 - 0,001 \cdot n$ .

<b>Вибіркові частоти,</b> $n_k$	4	18	30	$50+n$	36	$12+n$	2
<b>Теоретичні частоти,</b> $n'_k$	4	18	25	50	40	10	1

---

5. Провести аналітичне дослідження одного проблемного питання із числа наступних:
- економічна інтерпретація основних теорем теорії ймовірностей;

- зв'язок між твердженнями теореми Бернуллі та інтегральною функцією Лапласа;
  - порівняльна характеристика основних законів розподілу неперервних випадкових величин;
  - зв'язок понять кореляції, залежності та незалежності випадкових величин;
  - використання поняття потоку подій для математичного опису марковського випадкового процесу у сфері масового обслуговування.
-