ЗАКЛАД ВИЩОЇ ОСВІТИ «УНІВЕРСИТЕТ КОРОЛЯ ДАНИЛА»

СОЛОВКО Я.Т., ОСТАФІЙЧУК П.Г.,
ГАРПУЛЬ О.З., ВОЙТИК С.А.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА
(КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ + ТЕСТИ)

ІВАНО-ФРАНКІВСЬК - 2021

УДК 519.2
ББК 22.17
С 60

Рекомендовано Вченою радою Закладу вищої освіти
«Університет Короля Данила»
(Протокол №11 від 29.04.2021)

Рецензенти:

Яремій І.П., доктор фізико-математичних наук, професор (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника);

Луцишин Т.І., кандидат фізико-математичних наук, доцент (Івано-Франківський національний університет нафти і газу);

Бойчук А.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент (Заклад вищої освіти «Університет Короля Данила»).

С 60 Теорія ймовірностей та математична статистика (конспект лекцій + тести) : навчальний посібник. Вид. 2-ге, допов. / Я.Т.Соловко, П.Г.Остафійчук, О.З.Гарпуль, С.А.Войтик. – Івано-Франківськ: Репозитарій / ЗВО «Університет Короля Данила», 2021. – 150 с.

Посібник у стислій формі містить теоретичний матеріал курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» (означення, приклади, формули, теореми). У другій частині посібника наведено 250 тестових завдань, а також відповіді та рекомендації щодо їх виконання.

Для студентів технічних та економічних спеціальностей закладів вищої та фахової передвищої освіти.

ЗМІСТ

Лекції із позначкою *) вивчаються студентами спеціальностей, в яких за програмою не передбачено вивчення математичної статистики.

«Математику уже для того необхідно вчити, що вона розум в порядок приводить». Ломоносов М.

Передмова

ІСТОРИЧНІ ПЕРЕДУМОВИ ВИНИКНЕННЯ ТА РОЗВИТКУ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

У процесі свого розвитку математика постійно збагачувалася різними досягненнями – розробкою диференціального та інтегрального числення, побудовою неевклідової геометрії тощо. До цього переліку належить також теорія ймовірностей.

Теорія ймовірностей - одна з найпопулярніших наук сьогодення, прикладний характер якої дає можливість застосовувати її до розв'язання різноманітних задач економіки, природознавства, фізики та ряду технічних дисциплін. Дана наука має справу із системою масових явищ, результатами яких є певні випадкові події. Однак, не тільки професійне застосування теорії ймовірностей у науці, техніці, економіці тощо, яке набуває зростаючого значення, а й ознайомлення, нехай навіть суто поверхове, з найпростішими поняттями теорії ймовірностей для сучасної освіченої людини є вкрай необхідним незалежно від професії та роду діяльності. Навіть тоді, коли прогноз погоди містить повідомлення про випадання опадів на завтра, кожен повинен розуміти випадковий характер даної події.

Разом із вивченням теорії ймовірностей як науки, із її стрункою змістовною лінією та багатим математичним апаратом, варто не випустити з уваги також історичний розвиток науки, оскільки для того, щоб зрозуміти зміст певного конкретного поняття, потрібно дослідити динаміку його розвитку, звернути увагу на основні ключові фактори, які вплинули на його утворення. Теорія ймовірностей має багату і повчальну історію. Вона наочно показує, як виникали її основні поняття і методи, виходячи із завдань, з якими стикався суспільний прогрес.

Основними чинниками, що стимулювали розвиток теорії ймовірностей, були задачі практичного характеру, відповідь на які не могла дати жодна з існуючих на той час наук. Перші задачі ймовірнісного характеру, що вплинули на зародження і початковий розвиток теорії ймовірностей, виникли при обробці статистичних даних. У Давньому Єгипті, Греції, Римі робили окремі спроби підрахунку населення, кількості щорічно зібраного хліба. Статистика стала одним із суттєвих стимулів розвитку теорії ймовірності.

Теорія ймовірностей як наука зародилася в XVI-XVII століттях зі спроб описати теорію азартних ігор. Практика азартних ігор не була вирішальним стимулом для розвитку теорії ймовірності, але вона висувала задачі, що стимулювали її до розвитку. Однією з перших задач, яку слід віднести до теорії ймовірностей, є обчислення числа різних можливих варіантів (комбінацій, перестановок тощо) при киданні гральних кубиків. Найперша відома спроба підрахувати число можливих варіантів при киданні 3-х гральних кубиків, включаючи і перестановки, зустрічається в працях 1200-1250 років. Однак, слово ”комбінаторика“ вперше зустрічається в ”Міркуваннях про комбінаторне мистецтво“ - роботі двадцятирічного Лейбніца (1666 р.), яка стала початком цього розділу математики як самостійної науки. ”Міркування“ Лейбніца містило ряд теорем про сполучення та перестановки, але, крім того, автор проголошував дуже широке застосування нової науки до таких різноманітних сфер діяльності, як змішування кольорів, логіки, геометрії, військового мистецтва, граматики, юриспруденції, медицини і богослов'я.

Історично теорія ймовірностей має ряд етапів свого розвитку, кожен з яких характеризується певною особливістю у розвитку науки, а саме:

- *передісторія теорії ймовірностей (давні віки - XVI ст.);*
- *поява теорії ймовірностей як науки (XVII - XVIII ст.);*
- *поява роботи Якоба Бернуллі “Мистецтво припущень” (XIX ст.);*
- *створення Петербурзької школи (XIX – XX ст.)*
- *сучасний період розвитку теорії ймовірностей (XX – до сьогодення).*

Передісторія теорії ймовірностей. В цей період, початок якого знаходиться в давніх віках, ставилися і примітивно вирішувалися елементарні задачі, які пізніше були віднесені до теорії ймовірностей (збір статистичних даних, що носив ймовірнісний характер). Ніяких спеціальних методів у цей період не було. Йде просте накопичення матеріалу. Цей період закінчується в XVI ст. роботами Кардано, Пачіоллі, Тарталья та інших (де автори розглядають задачі, розв’язання яких містять елементи комбінаторики).

Поява теорії ймовірностей як науки. З’являються перші специфічні поняття, такі як математичне сподівання. Встановлено перші теореми науки - теореми додавання і множення ймовірностей. Початок цього періоду пов’язано з іменами Паскаля, Ферма, Гюйгенса. Цей період тривав із середини XVII ст. до початку XVIII ст. Теорія ймовірностей знаходить своє застосування в демографії, страховій справі, при оцінюванні похибок спостереження.

До цього етапу розвитку відносять роботи Якоба Бернуллі (робота “Мистецтво припущення”), Муавра, Лапласа, Гауса, Пуассона та інших. Теорія ймовірності починає застосовуватися в різних областях природознавства. Центральне місце займають граничні теореми.

Період розвитку теорії ймовірностей, пов'язаний із Петербурзькою школою. Тут можна назвати такі прізвища, як П.Л. Чебишов, А.А. Марков, А.М. Ляпунов. У цей період поширення закону великих чисел і центральної граничної теореми на різноманітні класи випадкових величин досягає своїх природних меж. Закони теорії ймовірності стали застосовуватися до залежних випадкових величин. Все це дало можливість застосувати теорію ймовірності до багатьох розділів природознавства, в першу чергу – до фізики.

Сучасний період. Сучасний період розвитку теорії ймовірностей розпочався зі встановлення аксіоматики. Цього, в першу чергу, вимагала практика, оскільки для успішного застосування теорії ймовірностей у фізиці, біології та інших областях науки, а також у техніці та військовій справі, необхідно було уточнити та привести в струнку систему її основні поняття. Це зумовило небувалу широту досліджень із теорії ймовірностей, починаючи від господарчо-прикладних питань і закінчуючи найвужчими питаннями кібернетики.

Цей період історії теорії ймовірностей характеризується надзвичайним розширенням кола її застосувань, створенням декількох систем бездоганно строгого математичного обґрунтування теорії ймовірностей (аксіоматики), нових потужних методів, які вимагають іноді застосування (крім класичного аналізу) ресурсів теорії множин, теорії функцій дійсної змінної і функціонального аналізу.

Фундаментальними поняттями теорії ймовірності є поняття ймовірності, випадкової величини і закону розподілу випадкової величини.

У буденному житті всі ми дуже часто говоримо – «це неймовірно» або «малоймовірно», маючи на увазі, що очікувати чогось за певних обставин – марно. Інколи навіть даємо числове вираження своїх відчуттів, кажучи – ймовірність 100% або – 50%. Але все це відбувається на рівні інтуїтивного сприйняття дійсності. Ведучи мову про ймовірність якоїсь події (наприклад події А), завжди треба мати на увазі , що це – числове вираження можливості появи цієї події. В теорії ймовірності класичний вираз для цієї кількісної оцінки має вигляд: $P(A) = m/n$, де *P(A)* – ймовірність події *A*, n – загальна кількість можливих наслідків, m – кількість наслідків, які сприяють події A.

Приклад. З колоди 36 карт вибирається одна карта. Яка ймовірність появи карти пікової масті?
<u>*Розв'язання*</u>*. Нехай А - поява карти пікової масті. Всього випадків 36. Число випадків, що сприяють події А, m=9. Значить Р(А)=9/36=0,25.*

Введення класичного означення ймовірності відбулося не в результаті однократної дії, а зайняло певний проміжок часу, як і формування самої теорії ймовірностей. Тобто, відбувалося безперервне вдосконалення формування, перехід від конкретних задач до загального випадку.

Найперші роботи, котрі були присвячені теорії ймовірності як науці, були написані Х. Гюйгенсом (1657) «Про розрахунки в азартних іграх». Однак, у своїй праці автор не дає чіткого формулювання для класичного означення ймовірності. Це поняття було введено, хоча і в недосконалій формі, Я. Бернуллі (1713) у трактаті ”Мистецтво припущень“: ”Імовірність – ступінь вірогідності і відрізняється від неї, як частина від цілого“. Як бачимо, таке формулювання є досить узагальненим. Однак, у п'ятій главі четвертої частини своєї роботи Я. Бернуллі описує класичну ймовірність як відношення числа ”щасливих“ випадків до кількості усіх можливих. Якобом Бернуллі було запропоновано й інше означення ймовірності як відношення кількості ”щасливих“ випадків до кількості ”нещасливих“. Однак в науці це означення не було прийняте з двох причин: 1) неадитивності відношень (першого та другого означень); 2) зміна відношення в останньому означенні від 0 до ∞.

У трактаті Я. Бернуллі присутні обидві концепції теорії ймовірності – статистична і класична. Обидві вони викладені не досить чітко, однак принципово новий крок у науці було зроблено – введено в розгляд поняття ймовірності випадкової величини як числа, що знаходиться в межах від 0 до 1. Вірогідній події при цьому приписувалася 1 (максимальне значення ймовірності), а неможливій – 0 (мінімальне значення). Крім того, було ясно сказано, що це число може бути визначено двома різними способами: шляхом підрахунку кількості усіх рівноможливих випадків, які сприяють події, та всіх можливих випадків і обчислення їх відношення, а також шляхом проведення великої кількості (класичний спосіб) незалежних випробувань і обчислення частоти події (статистичний спосіб).

Бернуллі обмірковував своє “Мистецтво припущень” довгі роки, за його словами близько 20. Однак, у світ воно вийшло лише через 8 років після смерті автора у 1713 році. Зміст цих публікацій вже був відомий широкому колу науковців у вигляді рукописів. Таким чином, цей трактат впливав на подальший розвиток теорії ймовірності ще до його публікації, що видно з праць А. Муавра.

Саме означення, що його дав Я. Бернуллі, стало першою сходинкою у розвитку теорії ймовірності як науки. А. Муавр підтримав це класичне означення ймовірності, яке дав Я. Бернуллі. Він писав: “Ми будуємо дріб, чисельником якого буде кількість випадків появи події, а знаменником – кількість усіх випадків, при яких вона може з’явитися чи не з’явитися, такий дріб буде визначати дійсну ймовірність її появи”. З визначення ймовірності випливає, що вона задовольняє співвідношення $0 \leq p \leq 1$.

Великий внесок у розвиток теорії ймовірностей зробив швейцарський вчений Л. Ейлер (1707-1783). Особливу увагу Ейлер приділяв темі демографії. Серед робіт цієї тематики можна виділити “Дослідження про смертність та примноження роду людського”, “Про примноження роду людського”. В цих роботах Ейлер вирішує багато задач, які лягли в основу математичної демографії. Ейлер створив вікову теорію смертності. Він отримав цікаві висновки при розв’язанні задач про подвоєння чисельності населення.

Однак, об’єктом досліджень у різних процесах, як правило, є не самі події, а значення (величини), яких набувають певні параметри внаслідок цих подій. Оскільки ця величина може під дією випадкових факторів із певною ймовірністю приймати те чи інше значення, то її називають ***випадковою величиною*** (змінною). Це змінна, якій навіть при фіксованих обставинах ми не можемо приписати певні значення, але можемо приписати кілька значень, які вона приймає з певними ймовірностями.

Сукупність значень $\{x_i\}$ випадкової величини X і ймовірностей $\{p_i\}$, з якими вона їх приймає, називають ***законом розподілу випадкової величини***. Функція ймовірностей, як і будь-яка фундаментальна залежність, може бути представлена в формі таблиці, формули або графіка. Наприклад, закон розподілу числа очок (на стороні кубика) при киданні грального кубика може бути представлений у вигляді:

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6
$P = p_i$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Очевидно, що сума всіх ймовірностей повинна бути рівна одиниці, оскільки вважається, що з ймовірністю “одиниця” випадкова величина X прийме хоч яке-небудь із цих значень. Звичайна (невипадкова, детермінована) величина є граничним випадком випадкової величини, приймаючи єдине значення з ймовірністю “одиниця”.

При обробці вибіркових даних в силу випадкової природи процесу одержання вибірки, важливо знати, яким ймовірнісним законам підпорядковуються вибіркові значення досліджуваного економічного показника. Існує цілий ряд законів розподілу ймовірності, які грають роль еталонів в статистичному аналізі. Насамперед, це нормальний закон розподілу.

Нормальний закон розподілу (який ще називається законом Гауса) відіграє виключно важливу роль в теорії ймовірностей і має серед інших законів розподілу особливий статус. Це закон, який найчастіше зустрічається на практиці. Так, наприклад, велика кількість гарматних пострілів, здійснених в різних умовах, показує, що розсіювання снарядів на площині при пострілі з однієї гармати при встановленому прицілі підлягає нормальному закону.

“Універсальність” нормального закону пояснюється тим, що будь-яка випадкова величина, яка є сумою великої кількості окремих числових значень, кожне з яких підпорядковується різним законам розподілу і несуттєво впливає на суму, розподілена майже за нормальним законом.

Суть нормального закону розподілу полягає в наступному. Якщо випадкова величина формується під дією великої кількості незалежних факторів, вклад кожного з яких в значення випадкової величини малий, то ця випадкова величина має нормальний розподіл. В ролі таких величин можуть виступати: обсяг продаж у промисловості в цілому, сумарні інвестиції, сумарне споживання домашніх господарств і їм подібних, які мають адитивну природу, тобто складаються з багатьох малих взаємозалежних величин. Основна властивість таких випадкових величин у тому, що неможливо передбачити, яке значення вона набуде в результаті випробування. Однак, при досить великій кількості випробувань поведінка суми незалежних випадкових величин втрачає випадковий характер і стає майже закономірною. При цьому розподіл ймовірностей набуває вигляду нормального розподілу.

Отже, предметом теорії ймовірностей є вивчення вірогідних закономірностей масових однорідних випадкових подій. Знання закономірностей, яким підкоряються масові випадкові події, дозволяє передбачати, як ці події будуть протікати.

Простеживши динаміку розвитку теорії ймовірності та її основних понять, можна відзначити, що вони формувалися на вимогу повсякденного життя для вирішення задач практичного характеру. На сучасному етапі методи теорії ймовірності виявилися придатними для вивчення різних явищ природи та суспільства, що породжуються випадком.

Лекція 1

ЕМПІРИЧНІ ТА ЛОГІЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Так склалося, що всі процеси, які трапляються в природі, зокрема, і процеси економічного характеру є випадковими, тобто поява чи непоява того чи іншого економічно результату залежить від багатьох економічних чи людських факторів, які є теж випадковими (отримання бажаного прибутку, як правило залежить від якості товару, його ціни, вдало проведеної рекламної кампанії, попиту на цей товар, форс-мажорних обставин та ін.). Тому виникає питання : чи можливо хоча б приблизно передбачити кінцевий результат, врахувавши всі фактори, які на нього впливають? Відповідь на це питання дає "Теорія ймовірностей", яка, вивчаючи випадкові процеси, надає їм конкретного числового тлумачення, назва якого — ймовірність.

Базові поняття та терміни

Будемо вважати, що ***випробування*** — це дослід, який при певних умовах може повторюватись скільки завгодно разів. Результатом кожного досліду є поява чи не поява якоїсь події A (наприклад, при киданні монети подія A — випадання герба). Природньо, що з появи чи не появи випадкової події A в одному випробуванні передбачити результат наступного досліду не вдасться. Проте, якщо розглянути дану випадкову подію проводячи багато випробувань (при одних і тих же умовах), то можна побачити певну закономірність її появи. Таку закономірність називають ***закономірністю масових однорідних подій***.

Математична наука, що вивчає закономірності випадкових масових подій, називається ***теорією ймовірностей.***

Події можуть бути трьох видів: ***вірогідні*** (обов'язково з'являється за даних умов), ***неможливі*** (не може з'явитись за даних умов) та ***випадкові*** (за даних умов може з'явитись, а може і не з'явитись). Перші два види подій є тривіальними, а тому ми, абстрагуючись від них, будемо займатись дослідженням тільки випадкових подій.

Події позначаються латинськими літерами: $A, B, C, \ldots$ або $A_1, A_2, A_3, \ldots$, $B_1, B_2, B_3, \ldots$ і т.д. Кожен неподільний результат експерименту здійснений за однієї спроби називається ***елементарною подією.*** Множина Ω всіх елементарних подій називається ***простором елементарних подій.***

Подія $\overline{A}$ (*чит. "не а"*) називається ***протилежною*** до події A, якщо вона настає тільки тоді, коли не настає подія A.

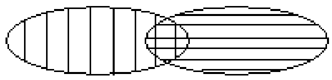
Приклад. Гральний кубик, кожна грань якого позначена цифрою від 1 до 6, підкидають один раз. При цьому на грані випадає одна із зазначених цифр.

Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту (множину Ω) і такі випадкові події: 1) A – випаде парне число; 2) B – випаде число, кратне 3.

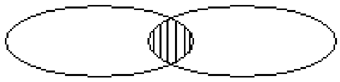
Розв'язання. Отже, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{3, 6\}$.

ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

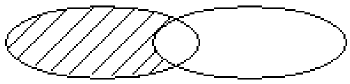
Додавання. ***Сумою*** подій A і B називається подія $C = A + B$ або $C = A \cup B$, де $\cup$ - знак об'єднання.



Множення. ***Добутком*** двох подій A і B називається подія $C = A \cdot B$ або $C = A \cap B$, де $\cap$ - знак перерізу.



Віднімання. ***Різницею*** двох подій A і B називається подія $C = A \setminus B$ або $C = A - B$.



Повна група подій $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Властивості:

1) $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\varnothing$ - порожня множина;
2) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;
3) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
4) $A \cup \Omega = \Omega$;
5) $A \cap \Omega = A$;
6) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$;
7) $\Omega \setminus A = \overline{A}$;
8) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
9) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
10) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
11) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
12) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Лекція 2
РІЗНІ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Ймовірністю випадкової події A називають невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню елементарних подій m $(m \le n)$, які сприяють A, до кількості всіх елементарних подій n.

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

$P(\Omega) = 1,\ 0 \le P(A) \le 1,\ P(\overline{A}) = 1 - P(A),\ P(\varnothing) = 0$.

Приклад. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність того, що випаде парне число?

Розв'язання. A – подія, що випаде парне число. $A = \{2, 4, 6\}$, $m = 3$; $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n = 6$.

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Якщо множина Ω є неперервною (має міру, S, V), то для обчислення ймовірності використовується <u>***геометрична ймовірність***</u>:

$$\boxed{P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}}.$$

Приклад. У коло радіуса R вписано правильний трикутник. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута в коло, попаде в трикутник.

Розв'язання. $S_\Delta = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$, $S_O = \pi r^2$, $P(A) = \frac{S_\Delta}{S_O} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2}{\pi r^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Статистична ймовірність. Вона використовується в економічних дослідженнях, коли спостерігається велика кількість подій і є певна закономірність цих подій.

$$\boxed{W(A) = \frac{m}{n}}$$

$W(A)$ називається ***відносною частотою появи*** випадкової події.

Приклад. Три стрільці роблять постріли із гвинтівок. Відносна частота попадання в ціль виявляється рівною *0,85*. Знайти число попадань, якщо було зроблено *120* пострілів.

Розв'язання. Число попадань $m = W(A) \cdot n$.

Відповідь: *102* попадання.

ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ І МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Випадкові події називають ***залежними***, якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

У протилежному випадку випадкові події називають ***незалежними***.

<u>**Теорема множення для залежних подій.**</u> Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша відбулася.

$$\boxed{P(AB)=P(B)P_B(A)=P(A)P_A(B)}$$

<u>Наслідок.</u> Якщо події незалежні, то

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B)}.$$

Приклад. Гральний кубик і монету підкидають по одному разу. Яка ймовірність того, що при цьому на грані кубика випаде парне число, а на монеті герб?

Розв'язання. A – подія, що випаде парне число. $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

B – подія, що випаде герб. $P(B)=\frac{1}{2}$.

$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Події A і B називають ***сумісними***, якщо вони можуть відбутися одночасно; інакше події ***несумісні***.

<u>Теорема додавання для сумісних подій.</u>

$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$.

<u>Теорема додавання для несумісних подій.</u>

$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)}$.

<u>Наслідок.</u> Сума ймовірностей протилежних подій рівна *1*.

$\boxed{P(A)+P(A)=1}$

Умовна ймовірність: $\boxed{P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}}$.

Лекція 3
ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Припустимо, що є повна група несумісних подій $B_1,\ B_2,\ \dots\ ,B_n$ і таких, що $B_i\cap B_j=\varnothing,\ i\neq j,\ i,\ j=1, 2, \dots \mathrm{n}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$. Нехай подія A – деяка подія, що настає за умови настання якоїсь із подій $B_1,\ B_2,\ \dots,B_n$. Імовірність події A обчислюється за формулою

$$\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i)}\ ,$$

яка називається ***формулою повної ймовірності.***

Випадкові події $B_1,\ B_2,\ \dots,B_n$ називають ***гіпотезами*** або ***припущеннями***.

Приклад. В урну, що містить *2* кульки, кладуть *1* білу кульку. Після цього навмання дістали *1* кульку. Знайти ймовірність того, що це виявиться біла кулька, якщо рівноможливі всі припущення про початковий склад урни.

Розв'язання. Подія A - дістали білу кульку.

Можливі такі гіпотези (припущення):

B_1 – білих кульок не було.

B_2 – була *1* біла кулька.

B_3 – було *2* білих кульки.

$P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=P(\Omega)=1.$

Оскільки B_i – рівноможливі, то $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$.

Умовна ймовірність за умови B_1: $P(A/B_1)=\frac{1}{3}$.

За умови B_2: $P(A/B_2)=\frac{2}{3}$.

За умови B_3: $P(A/B_3)=\frac{3}{3}=1$.

Шукану ймовірність, що дістали білу кульку, знайдемо за формулою

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A/B_i)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3}=\frac{2}{3}.$$

ФОРМУЛА БАЙЄСА

Із формули множення ймовірностей для залежних випадкових подій A, B_i $(i=1,\ 2,\ \ldots\ ,n)$ дістанемо

$$P(A)\cdot P(B_i/A)=P(B_i)\cdot P(A/B_i)\Rightarrow$$
$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A/B_i)}\Rightarrow$$
$$\boxed{P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A/B_i)}}$$ – ***формула Байєса***.

Після переоцінювання всіх гіпотез B_i маємо:

$$\sum_{i=1}^{n}P(B_i/A)=\sum_{i=1}^{n}\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1.$$

Приклад. Для заліку викладач підготував 50 задач: 20 з вищої математики, 20 із теорії ймовірності і 10 із чисельних методів. Для отримання заліку необхідно розв’язати 1 задачу, запропоновану викладачем. Студент вміє розв’язувати 18 задач із вищої математики, 15 задач із теорії ймовірності та 5 із чисельних методів. Студент склав залік. Знайти ймовірність того, що йому дісталася задача з теорії ймовірності.

Розв’язання. Подія A – студент склав залік.

Гіпотези (припущення): B_1 – попалася задача з вищої математики;

B_2 – попалася задача з теорії ймовірності;

B_3 – попалася задача з чисельних методів.

$P(B_1)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$; $P(B_2)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$; $P(B_3)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$.

Умовні ймовірності відповідно дорівнюють:

$$P(A/B_1)=\frac{18}{20};\; P(A/B_2)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4};\; P(A/B_3)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

Тоді ймовірність того, що студенту дісталася задача з теорії ймовірності і він її розв'язав, за формулою Байєса дорівнює:

$$P(B_2/A)=\frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{15}{38}.$$

ПОСЛІДОВНІСТЬ НЕЗАЛЕЖНИХ ПОДІЙ

Нехай здійснено n незалежних випробувань. Подія A може відбутися зі сталою ймовірністю p, або не відбутися з ймовірністю q $(p+q=1)$. Результат кожного випробування не залежить від результатів попередніх випробувань, тобто випробування *незалежні*. Тоді кажуть, що випробування здійснюються за ***схемою Бернуллі***: $B(n,p)$, де n і p – параметри схеми Бернуллі. Треба знайти ймовірність того, що в n випробуваннях подія A відбудеться k разів.

Подію B, яка полягає в тому, що подія A настає при кожному із k випробувань і не настала при $n-k$ випробуваннях, можна записати у вигляді добутку:

$$B=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k\ \text{разів}}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{\text{n-}k\ \text{разів}}\qquad (*).$$

Оскільки всі події незалежні, то ймовірність настання події B дорівнює добутку ймовірностей A і $\overline{A}$:

$$P(B)=p^k(1-p)^{n-k}=p^kq^{n-k}.$$

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

Подія A може відбуватися k разів при n випробуваннях, але при цьому може утворитися послідовність подій, відмінна від (*). Проте для будь-якої послідовності настання події A k разів при n випробуваннях дорівнює $p^k\cdot q^{n-k}$. Число найрізноманітніших послідовностей появи події A дорівнює кількості комбінацій з n елементів по k. Тому шукану ймовірність, яку позначають $P_n(k)$ обчислюють як суму настання різних наслідків із серії n випробувань:

$$\boxed{P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=C_n^kp^kq^{n-k}}.$$

Цю формулу називають ***формулою Бернуллі***.

Приклад. В урні *15* кульок – *10* чорних і *5* білих. Випробування виконують так: виймають одну кульку, фіксують її колір і кладуть назад; перемішують і виймають ще одну. Таку процедуру виконують кілька разів. Яка ймовірність того, що з *5* вийнятих кульок буде *4* білих?

Розв'язання.

$p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ - ймовірність витягнути білу кульку.

$1 - p = q = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ - ймовірність того, що білу не витягнули.

За формулою Бернуллі знаходимо ймовірність появи *4* білих із *5* витягнутих:

$$P_5(4) = C_5^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{5-4} = 5 \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{243}.$$

НАЙІМОВІРНІШЕ ЧИСЛО ПОЯВИ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Найімовірнішим числом появи випадкової події A в результаті n незалежних випробувань за схемою Бернуллі називають таке число k_0, для якого ймовірність $P_n(k_0)$ перевищує або не є меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків випробувань.

Приклад. Імовірність появи випадкової події A в кожному з $n = 5$ незалежних випробувань є величиною сталою і дорівнює $p = 0{,}5$ ($q = 1 - p = 0{,}5$). Обчислимо ймовірність подій для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$P_n(k)$	*1/32*	*5/32*	*10/32*	*10/32*	*5/32*	*1/32*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

$$P_5(k) = C_5^k 0{,}5^k 0{,}5^{5-k} = \frac{5!}{k!(5-k)!} 0{,}5^k 0{,}5^{5-k}.$$

При $k = 2$ і $k = 3$ (з таблиці) ймовірність набуває найбільшого значення, а саме $P_5(2) = P_5(3) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$. Отже, найімовірніше число появи події є $k_0 = 2$ або 3.

Для знаходження найімовірнішого числа події немає необхідності обчислювати ймовірність для всіх можливих k $(0 \le k \le n)$. Покажемо це.

Запишемо формули ймовірності для $k = k_0$, $k = k_0 - 1$, $k = k_0 + 1$ і розглянемо їхні відношення:

$$\frac{P_n(k_0)}{P_n(k_0 - 1)} \ge 1 \Rightarrow \frac{C_n^{k_0} p^{k_0} q^{n-k_0}}{C_n^{k_0 - 1} p^{k_0 - 1} q^{n-k_0+1}} = \frac{\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!} p^{k_0} q^{n-k_0}}{\frac{n!}{(k_0-1)!(n-k_0+1)!} p^{k_0-1} q^{n-k_0+1}} =$$

$$= \frac{p(n-k_0+1)}{k_0 \cdot q} \ge 1 \Rightarrow pn - pk_0 + p \ge k_0 - k_0 p \quad \Rightarrow \boxed{k_0 \le pn + p}. \qquad (a)$$

$$\frac{P_n(k_0)}{P_n(k_0 + 1)} \ge 1 \Rightarrow \frac{C_n^{k_0} p^{k_0} q^{n-k_0}}{C_n^{k_0 + 1} p^{k_0 + 1} q^{n-k_0-1}} = \frac{\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!} p^{k_0} q^{n-k_0}}{\frac{n!}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!} p^{k_0+1} q^{n-k_0-1}} =$$

$$=\frac{q}{p}\cdot\frac{(k_0+1)}{n-k_0}=\frac{(k_0+1)(1-p)}{pn-pk_0}\geq 1\Rightarrow 1-p+k_0-pk_0\geq pn-pk_0\Rightarrow q+k_0\geq pn\Rightarrow$$

$$\boxed{k_0\geq pn-q}\ \textit{(б)}$$

Об'єднавши *(а)* і *(б)*, отримаємо:

$$\boxed{pn-q\leq k_0\leq pn+p}.$$

Число k_0 називають також ***модою***.

Приклад. Ймовірність того, що студент складе іспит з теорії ймовірності, є величина стала і дорівнює *0,8*. Знайти найімовірнішу кількість членів групи з *8* чоловік, що складуть іспит і обчисліть відповідну ймовірність.

Розв'язання.

$n=8,\ p=0{,}8,\ q=1-p=0{,}2,\ np-q\leq k_0\leq np+p,\ 8\cdot 0{,}8-0{,}2\leq k_0\leq 8\cdot 0{,}8+0{,}8,$

$6{,}2\leq k_0\leq 7{,}2$, отже $k_0=7$.

$P_8(7)=C_8^7p^7q=8\cdot(0{,}8)^7\cdot 0{,}2=1{,}6\cdot(0{,}8)^7\approx 0{,}524288.$

Отже, найімовірніша кількість студентів, що здадуть іспит, рівна *7*.

Відповідь. Найімовірніше число $k_0=7$, відповідна ймовірність дорівнює *0,524288*.

Лекція 4
РОЗПОДІЛ ПУАССОНА ДЛЯ МАЛОЙМОВІРНИХ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

Якщо у послідовності незалежних випробувань за схемою Бернуллі n досить велике, а p мале ($p\leq 0{,}1$), і припустимо, що $p\cdot n=\lambda$, то при обчисленні $P_n(k)$ використовують ***граничну формулу Пуассона*** *(закон "рідкісних" явищ)*:

$$\boxed{P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}},\ \text{де}\ k=0,1,\ldots,n,\quad \lambda=np.$$

Доведення. За формулою Бернуллі $P_n(k)=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$. Оскільки $\lambda=np$, то $p=\dfrac{\lambda}{n}$ і відповідно

$$P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

За умовою $n\to\infty$, а $p\to 0$. Тоді

$$P_n(k)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda^k}{n^k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right]=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[1\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right]=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[\underset{\substack{\Downarrow\\0}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\ldots\cdot\underset{\substack{\Downarrow\\0}}{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right]=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda},\text{ бо }\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda},\text{ а}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=1.$$

Приклад. Завод SONY відправив на базу в Україну 5000 доброякісних телевізорів. Ймовірність того, що в дорозі пошкодиться телевізор, рівна *0,0002*. Знайти ймовірність того, що на базу в Україну прибуде *3* несправних телевізори.

Розв'язання. За умовою, $n = 5000, \quad p = 0{,}0002, \quad k = 3$.

Знайдемо $\lambda = np = 5000\cdot 0{,}0002 = 1$.

За формулою Пуассона $P_{5000}(3) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \dfrac{e^{-1}}{3!} = \dfrac{1}{6\cdot e} \approx \dfrac{1}{6\cdot 2{,}71} \approx 0{,}06$.

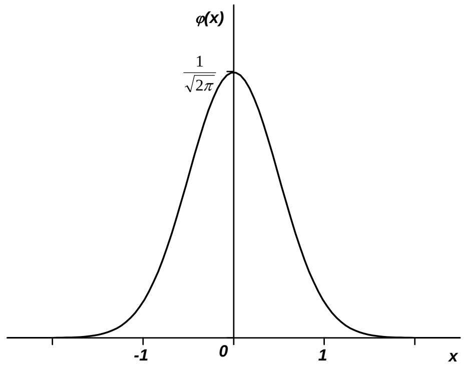
ЛОКАЛЬНА ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Якщо ймовірність появи випадкової події з n незалежних експериментів є сталою і дорівнює p $(0 < p < 1)$, то для великих значень n, коли формулою Бернуллі користуватися важко, застосовують ***локальну теорему Муавра-Лапласа***, яка дає *асимптотичну формулу* виду

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)},$$

$$\text{де } \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}} - \textit{функція Гауса},\ x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція $\varphi(x)$ є табульованою, тобто існують таблиці значень функції $\varphi(x)$ для додатного значення аргументу x. Оскільки функція $\varphi(x)$ – парна, то $\varphi(x) = \varphi(-x)$ і використовують ті ж самі таблиці.



Приклад. *20 %* всіх риб у ставку складають карасі. Знайти ймовірність, що серед *400* виловлених риб буде рівно *80* карасів.

Розв'язання. За умовою $n = 400, \quad p = 0{,}2, \quad k = 80, \quad q = 0{,}8$.

$$P_n(k) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = \frac{\varphi(x)}{8}.$$

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=\frac{80-400\cdot 0{,}2}{8}=0.$$

За таблицею в кінці посібника $\varphi(0)=0{,}3989$, тоді $P_{400}(80)=\frac{0{,}3989}{8}=0{,}0498$.

ІНТЕГРАЛЬНА ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Якщо ймовірність у кожному із n незалежних випробувань є величина стала і дорівнює p $(0<p<1)$, то для великих значень n ймовірність появи випадкової події в межах від k_1 до k_2 $\left(k_1\le k\le k_2\right)$ обчислюють, використовуючи ***інтегральну теорему Муавра-Лапласа***, яка дає *асимптотичну формулу* виду

$$\boxed{P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{2\pi}\int_{x'}^{x''}e^{-\frac{z^2}{2}}dz},$$

де $x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{o}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – *функція Лапласа*, значення якої для аргументу x дано в таблицях. Оскільки функція непарна $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, то використовуються ті ж таблиці з врахуванням знаку.

Для користування таблицею зробимо відповідні перетворення:

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{2\pi}\int_{x'}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{x''}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x''}e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x'}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi(x'')-\Phi(x').$$

Остаточно маємо $\boxed{P_n(k_1,k_2)\approx\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)}$.

Приклад. Ймовірність влучання в мішень при одному пострілі рівна *0,75*. Знайти ймовірність того, що при *100* пострілах у мішень число влучень знаходиться між *70* і *80*.

Розв'язання. За умовою задачі $p=0{,}75,\quad n=100,\quad q=0{,}25,\quad k_1=70,\quad k_2=80$.

Знайдемо: $np=0{,}75\cdot 100=75$, $\sqrt{npq}=\sqrt{0{,}75\cdot 0{,}25\cdot 100}=4{,}25$,

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-75}{4{,}25}=-\frac{5}{4{,}25}=-1{,}1764,$$

$$x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-75}{4{,}25}=\frac{5}{4{,}25}=1{,}1764,$$

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Шукана ймовірність $P_{100}(70,80)\approx\Phi(1{,}1764)-\Phi(-1{,}1764)=\Phi(1{,}1764)-(-\Phi(1{,}1764))=$

$$= \Phi(1{,}1764) + \Phi(1{,}1764) = 2\Phi(1{,}1764) = 2 \cdot 0{,}3810 = 0{,}7620 .$$

Лекція 5
ОДНОМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

До цього часу ми розглядали поняття події як певної якісної ознаки, що відображає лише два альтернативні судження: є подія (відбулася) або немає (не відбулася). Тепер будемо розглядати нове поняття – *випадкову величину* – абстрактну модель кількісної ознаки.

ДИСКРЕТНІ ТА НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ЇХ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Розглянемо простір елементарних подій Ω. Кожній елементарній події простору $\omega_i \in \Omega$ відповідає лише одне число x або набір чисел $(x_1,\ x_2, \dots, x_k)$, тобто на множині Ω визначена певна функція $\alpha(\omega_i)$. Цю функцію називають ***випадковою величиною***. Коли ω_i відповідає один елемент x, то випадкову величину називають ***одновимірною***, якщо набір чисел $(x_1,\ x_2, \dots, x_k)$, то n-***вимірною***. Якщо множина можливих значень випадкової величини приймає окремі ізольовані значення з визначеними ймовірностями, то таку величину називають ***дискретною***. Якщо випадкова величина приймає всі значення з деякого скінченого або нескінченного проміжку, то вона називається ***неперервною***.

Приклад 1. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, ..., 10\}$. Навмання беруть одне число. Елементарні події будуть такі: поява одного з чисел $\alpha(\omega_i) = 1, 2, ..., 10$ з певною ймовірністю. Множина можливих значень $\alpha(\omega_i)$ є дискретною, тому й випадкова величина (поява одного з чисел) є дискретною.

Приклад 2. Вимірюється сила струму амперметром. Результат округлюється до найближчої поділки на шкалі. Похибка вимірювання, яка виникає при округленні, є неперервною випадковою величиною.

Випадкові величини позначаються великими латинськими літерами: X, Y, Z, а їхні *можливі значення* - x, y, z. Для опису випадкової величини необхідно навести не лише множину значень, а й вказати, з якими ймовірностями ця величина набуває можливих значень. Для цього вводять поняття *закону розподілу випадкової величини*. Співвідношення, які встановлюють зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями, називаються ***законом розподілу випадкової величини***.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X задається у табличній формі:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k

Оскільки випадкові події є несумісні, то необхідною є така умова:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i = 1}$$ - ***умова нормування*** для дискретної випадкової величини *X*.

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

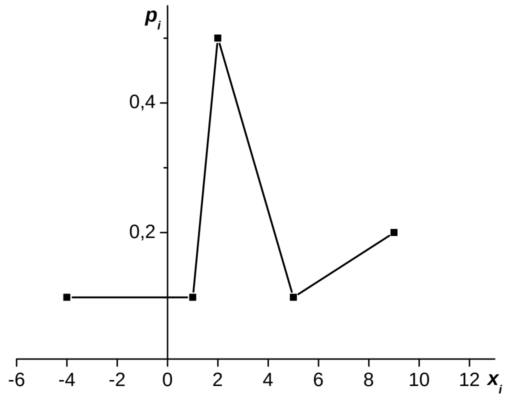
$X = x_i$	*-4*	*1*	*2*	*5*	*9*
$P(X = x_i) = p_i$	*0,1*	*0,1*	*0,5*	p_4	*0,2*

Знайти ймовірність можливого значення випадкової величини $X = x_4 = 5$.

Розв'язання. За умовою нормування $\sum_{i=1}^{5} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$.

$0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 + p_4 + 0{,}2 = 1 \Rightarrow p_4 = 0{,}1$.

Закон розподілу ймовірності можна зобразити графічно:



ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТІ (ІНТЕГРАЛЬНА ФУНКЦІЯ) ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

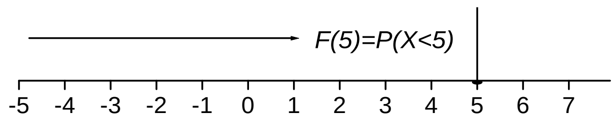
Закон розподілу ймовірності для дискретних і неперервних випадкових величин можна подати ще в одній формі як *функцію розподілу ймовірності* $F(x)$, так звану *інтегральну функцію*.

Функція аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називається ***функцією розподілу ймовірності***:

$$\boxed{F(x) = P(X < x)}.$$

Цю функцію можна *тлумачити* так: внаслідок експерименту випадкова величина може набувати значень, менших за x.

Приклад. $F(5) = P(X < 5)$ означає, що випадкова величина X (дискретна чи неперервна) набуває значення, що знаходяться ліворуч від 5.



<u>Властивості інтегральної функції розподілу:</u>

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ є неспадною, тобто $F(x_2) > F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

3. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу $[a, b]$, дорівнює приросту інтегральної функції на цьому інтервалі: $P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$.

4. Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність, що вона набуде конкретного значення, дорівнює нулю: $P(X = x_i) = 0$.

5. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу $[a, b]$, то

1) $F(x) = 0$, при $x \le a$;

2) $F(x) = 1$, при $x \ge b$.

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	*-4*	*1*	*2*	*5*	*9*
$P(X = x_i) = p_i$	*0,1*	*0,2*	*0,4*	*0,2*	*0,1*

Побудувати $F(x)$ та її графік.

Розв'язання. За властивостями інтегральної функції отримаємо:

1) $F(-4) = P(X < -4) = 0$.

2) $F(1) = P(X < 1) = 0{,}1$.

3) $F(2) = P(X < 2) = P(X = -4) + P(X = 1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$.

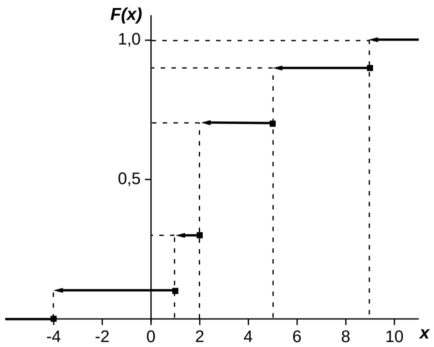
4) $F(5) = P(X < 5) = P(X = -4) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}7$.

5) $F(9) = P(X < 9) = F(5) + P(X = 9) = 0{,}7 + 0{,}2 = 0{,}9$.

6) $F(x)\big|_{x>9} = P(x > 9) = 1$.

Компактно:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4, \\ 0{,}1, & -4 < x \le 1, \\ 0{,}3, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}7, & 2 < x \le 5, \\ 0{,}9, & 5 < x \le 9, \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

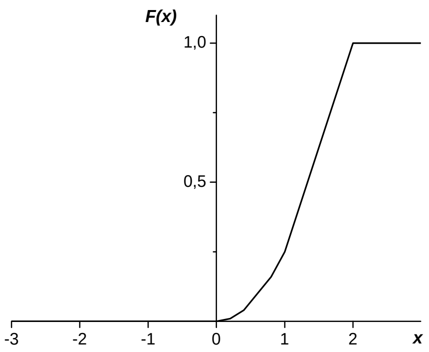


2. *Приклад*. Задано функцію розподілу неперервної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Побудувати графік її функції.

Розв'язання. Графік функції $F(x)$ має вигляд:



ЩІЛЬНІСТЬ ЙМОВІРНОСТІ (ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ФУНКЦІЯ) ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Неперервні випадкові величини зручно описувати за допомогою *щільності ймовірності*, яку позначають $f(x)$.

Щільністю ймовірності неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$:

$$\boxed{f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}}.$$

Звідси $dF(x)=f(x)dx$. Знаючи $f(x)$, можна знайти $F(x)$:

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx}.$$

<u>Властивості щільності ймовірності</u>:

1) $f(x)\geq 0$. Ця властивість випливає з означення, оскільки $F(x)$ є неспадною.

2) *Умова нормування*: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

3) Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтервалу $[a, b]$, дорівнює:

$$P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Приклад. Закон розподілу неперервної випадкової величини X такий:

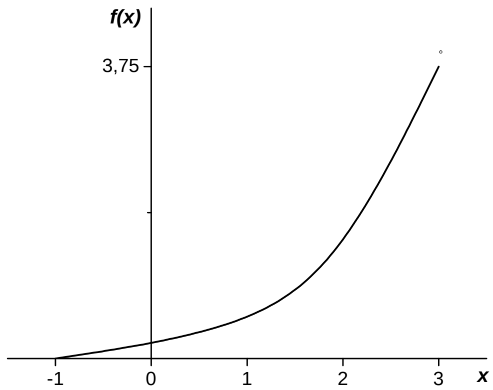
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq -1,\\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & -1<x\leq 3,\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графік $f(x)$. Обчислити $P(0<X<2)$ двома способами.

Розв'язання.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \dfrac{3}{64} \cdot (x+1)^3, & -1 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Графік функції $f(x)$:



Імовірність події $0 < X < 2$:

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{3}{64}(2+1)^3 + \frac{3}{64}(0+1)^3 = \frac{13}{32}.$$

$$P(0 < X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{3}{64}(x+1)^2 dx = \frac{3}{64}\int_0^2 (x+1)^2 dx = \frac{3}{64} \frac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32}.$$

Лекція 6
ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Закон розподілу ймовірності для дискретних та неперервних випадкових величин дає повну інформацію про них. Проте на практиці немає необхідності так докладно їх описувати, достатньо знати лише певні параметри, що характеризують їхні істотні характеристики. Ці параметри і називають ***числовими характеристиками випадкових величин***.

1. Математичне сподівання

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків всіх її можливих значень на їхні ймовірності:

$$\boxed{M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}.$$

Якщо випадкова величина неперервна, то

$\boxed{M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx}$ (для $\Omega \in (-\infty; +\infty)$)

$$\boxed{M(X)=\int_a^b xf(x)dx}\ (\text{для }\Omega\in[a\,;b]).$$

Властивості:

1. Якщо $C=const$, то $M(C)=C$.

2. $M(CX)=CM(X)$.

Доведення. $M(CX)=\sum_{i=1}^{n}Cx_i p_i=C\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=CM(X)$.

$$M(CX)=\int_a^b Cxf(x)dx=C\int_a^b xf(x)dx=CM(X).$$

3. $M(AX+B)=AM(X)+B$.

Приклад. Закон розподілу дискретної величини:

x_i	*-6*	*-4*	*2*	*4*	*6*	*8*
p_i	*0,1*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,1*	*0,2*

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5+x_6p_6=$$
$$=-6\cdot 0{,}1+(-4)\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}3+6\cdot 0{,}1+8\cdot 0{,}2=2{,}8.$$

Модою дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи. Для неперервної величини – це буде максимальне значення щільності ймовірності.

Медіаною (Me) неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконується умова $F(Me)=0{,}5$.

2. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення

Математичне сподівання не дає повної інформації про випадкову величину, оскільки одному і тому ж значенню $M(X)$ може відповідати велика кількість випадкових величин. Тому вводять ще одну величину – *дисперсію*.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрату відхилення цієї величини:

$$\boxed{D(X)=M(X-M(X))^2}.$$

Для *дискретної* випадкової величини X дисперсія

$$\boxed{D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i}.$$

Для *неперервної* випадкової величини X дисперсія

$$\boxed{D(X)=\int_a^b (x\cdot M(X))^2 f(x)dx}.$$

Властивості дисперсії:

1. Якщо $C=const$, то $D(C)=0$.

$$D(C)=M(C-M(C))^2=M(C-C)^2=M(0)=0.$$

2. $D(CX) = C^2 D(X)$.

Доведення.

$D(CX) = M(CX - M(CX))^2 = M(CX - CM(X))^2 = M(C(X - M(X)))^2 =$
$= C^2 M(X - M(X))^2 = C^2 D(X)$.

3. Якщо A і B – сталі величини, то $D(AX + B) = A^2 D(X)$.

4. $D^2(X) \geq 0$.

Дисперсію можна обчислювати і за такою *формулою*:

$$\boxed{D(X) = M(X^2) - M^2(X)}.$$

Для *дискретної* випадкової величини X дисперсія

$$\boxed{D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X)}.$$

Для *неперервної* випадкової величини X дисперсія

$$\boxed{D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X)}.$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}.$$

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано:

x_i	-4	-2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Обчислити $\sigma(X)$, $D(X)$.

Розв'язання.

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{6} x_i p_i\right)^2.$$

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -4 \cdot 0{,}1 + (-2) \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}9.$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = (-4)^2 \cdot 0{,}1 + (-2)^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 6^2 \cdot 0{,}1 = 8{,}7.$$

$D(X) = 8{,}7 - 0{,}9^2 = 7{,}89$.

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}89} = 2{,}8$.

3. Початкові та центральні моменти

Початковим моментом k***-го порядку випадкової величини*** X називають математичне сподівання величини X^k:

$$\boxed{\nu_k = M(X^k)},\ (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

При $k = 1$, $\nu_1 = M(X)$. При $k = 2$, $\nu_2 = M\left(X^2\right)$ і т.д.

Для *дискретної* випадкової величини X:

$$\boxed{\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i}.$$

Для *неперервної* випадкової величини X:

$$\boxed{\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx}.$$

Центральним моментом k***-го порядку випадкової величини*** X називають математичне сподівання від $\left(X - M(X)\right)^k$:

$$\boxed{\mu_k = M\left(X - M(X)\right)^k}, \ (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

При $k = 1$, $\mu_1 = M\left(X - M(X)\right) = 0$.

$M\left(X - M(X)\right) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$.

При $k = 2$, $\mu_2 = M\left(X - M(X)\right)^2 = D(X)$.

При $k = 3$, $\mu_3 = M\left(X - M(X)\right)^3$ і т.д.

Для *дискретної* випадкової величини X:

$$\boxed{\mu_k = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^k p_i}.$$

Для *неперервної* випадкової величини X:

$$\boxed{\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^k f(x)dx}.$$

Запишемо ще *додаткові співвідношення*:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2, \\ &\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3, \\ &\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 \end{aligned}}.$$

Лекція 7
ДЕЯКІ РОЗПОДІЛИ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1. Біноміальний закон розподілу.

Біноміальним називають закон розподілу дискретної випадкової величини X - числа появи події в n незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі, в кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p. Ймовірність можливого значення $X = k$ - числа появи події *обчислюють за формулою Бернуллі*:

$$\boxed{P_n(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}}.$$

Математичне сподівання біноміального розподілу дорівнює добутку числа випробувань n на ймовірність p появи події в одному випробуванні $\boxed{M(X) = np}$, а *дисперсія* $\boxed{D(X) = npq}$.

2. Закон Пуассона.

Якщо число випробувань велике, а ймовірність p настання події в кожному випробуванні незначна, то використовують наближену формулу:

$$\boxed{P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}},$$

де k - число появи події в n незалежних випробуваннях, $\lambda=np$ (середнє число появи події в n незалежних випробуваннях), і кажуть, що випадкова величина розподілена ***за законом Пуассона***.

Математичне сподівання для закону Пуассона $\boxed{M(X)=\lambda}$, а *дисперсія* $\boxed{D(X)=\lambda}$.

3. Геометричний закон розподілу.

Інколи спроби здійснюють до першої появи випадкової події. Число проведення спроб буде цілим числом. Цілочислова випадкова величина X має ***геометричний закон розподілу***, якщо ймовірність її можливих значень

$$\boxed{P_k=P(X=k)=pq^{k-1}}, \text{ де } k=1,2,...,n.$$

У табличній формі:

$X=k$	1	2	3	4	...
$P(X=k)=pq^{k-1}$	p	pq	pq^2	pq^3	...

Числові характеристики цього закону:

$$\boxed{M(X)=\frac{1}{p},\ D(X)=\frac{q}{p^2}}.$$

4. Рівномірний закон розподілу ймовірностей.

Цілочислова випадкова величина X має ***рівномірний закон розподілу***, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою:

$$\boxed{P_k=P(X=k)=\frac{1}{n}}.$$

У табличній формі:

$X=x_k=k$	1	2	3	...	n
$P_k=P(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Числові характеристики рівномірного закону:

$$\boxed{M(X)=\frac{n+1}{2},\ D(X)=\frac{n^2-1}{12}}.$$

ОСНОВНІ ЗАКОНИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1. Нормальний закон розподілу.

Неперервна випадкова величина X має ***нормальний закон розподілу***, якщо щільність

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}},\ -\infty<x<+\infty,\ \text{де}\ a=M(X),\ \sigma=\sigma(X).$$

Цей закон називають *загальним*.

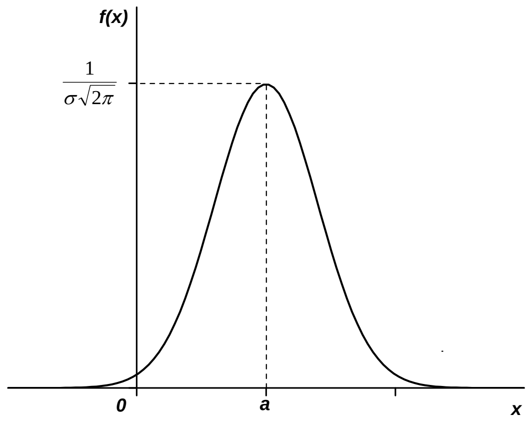
$$\boxed{F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx}.$$

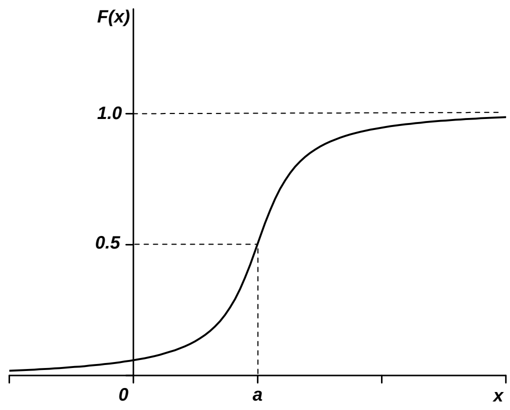
Якщо $a=0,\quad \sigma=1$ - розподіл називають *нормованим*. Тоді

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{-x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty,\ f(x)=\varphi(x)$$ - *функція Гауса*.

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{-x^2}{2}}dx.$$

Графік функції $f(x)$ називають ***нормальною кривою*** або ***кривою Гауса***.





Числові характеристики нормального розподілу дорівнюють:

$$\boxed{M(X)=a,\ D(X)=\sigma^2,\ \sigma(x)=\sigma}.$$

Правило трьох сигм для нормального закону

Якщо випадкова величина розподілена нормально, то

$$\boxed{P(|X-a|>3\sigma)=0{,}0027}.$$

Тобто ймовірність того, що випадкова величина X, яка має нормальний закон розподілу, не потрапить у проміжок $[a-3\sigma;\ a+3\sigma]$, дорівнює *0,0027*. Це становить *0,27%*, тобто практично вважається, що ця подія внаслідок одного експерименту не здійсниться.

Доведення.

$$P(|X-a|<3\sigma)=P(a-3\sigma<X<a+3\sigma).$$

Для нормального закону:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Тоді

$$P(|X-a| < 3\sigma) = \Phi\left(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = .$$

$$= 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

$P(|X-a| > 3\sigma) = 1 - P(|X-a| < 3\sigma) = 1 - 0{,}973 = 0{,}0027$, або

$P(|X-a| > 3\sigma) \to 0$.

2. Рівномірний розподіл.

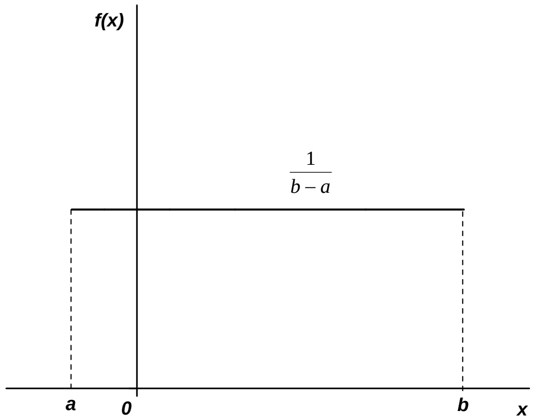
Величина X ***рівномірно*** розподілена на проміжку $[a; b]$, якщо щільність

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{ при } x \in [a,b] \\ 0, \quad \text{при } x \notin [a,b] \end{cases}.$$

Функція розподілу ймовірностей:

$$F(x) = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dx = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, \text{ при } x \in [a,b] \\ 0, \quad \text{при } x \notin [a,b] \end{cases}.$$

Графік рівномірного розподілу:



Рівномірному розподілу задовольняють, наприклад, похибки округлення різноманітних розрахунків.

Числові характеристики цього розподілу:

$$\boxed{M(X) = \frac{b+a}{2},\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}.$$

3. Показниковий розподіл

Випадкова величина X розподілена ***за показниковим законом***, якщо щільність її ймовірності має вигляд:

$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } x \geq 0 \\ 0, \quad \text{при } x < 0 \end{cases}$, де $\lambda > 0$ - *параметр* розподілу.

Інтегральна функція $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Тому $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Показниковому розподілу задовольняє тривалість телефонної розмови, гарантійний термін ремонту техніки і т.п.

Числові характеристики показникового розподілу:

$$\boxed{M(X) = \frac{1}{\lambda},\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2}}.$$

Приклади.

1. Завод випускає 96% виробів I сорту і 4% - II сорту. Навмання відібрана партія з 1000 виробів. Нехай X - число виробів I сорту у вибірці. Знайти середнє значення і дисперсію випадкової величини X.

Розв'язання. Випадкова величина X має біноміальний розподіл, оскільки випробування здійснюється за схемою Бернуллі.

За умови $n = 1000$, $p = 0{,}96$, $q = 0{,}04$ знайдемо:

$M(X) = np = 960$, $D(X) = npq = 38{,}40$.

2. Автобуси ходять з інтервалом 5 хв. Вважаючи, що випадкова величина X - час очікування автобуса на зупинці – розподілена рівномірно на вказаному проміжку часу, знайти середній час очікування та дисперсію часу очікування.

Розв'язання. Час очікування є випадковою величиною, розподіленою рівномірно на інтервалі $[0; 5]$.

Щільність рівномірного розподілу $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

За умовою інтервал $b - a = 5 - 0 = 5$. $f(x) = \dfrac{1}{5}$.

Тоді $M(x) = \int\limits_a^b xf(x)dx = \dfrac{b+a}{2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$, $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{25}{12}$.

3. Знайти числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, \text{ при } x \ge 0 \\ 0, \quad \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. В даному випадку випадкова величина X розподілена за показниковим законом із параметром $\lambda = 4$.

$$M(X) = \sigma(x) = \frac{1}{\lambda} = 0{,}25,\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 0{,}0625.$$

4. Термін роботи приладу є неперервною випадковою величиною X, що має нормальний закон розподілу з гарантією 15 років і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3$ роки. Визначити надійність приладу за проміжок часу від 10 до 20 років.

Розв'язання. За умовою $M(X) = 15$, $\sigma(x) = 3$, $\alpha = 10$, $\beta = 20$. Необхідно визначити $P(\alpha < X < \beta)$.

Використаємо формулу $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right)$.

$$P(10 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-15}{3}\right) - \Phi\left(\frac{10-15}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}9050.$$

Лекція 8
СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Є випадки, коли в одному просторі елементарних подій Ω можна визначити кілька випадкових величин. Так, у разі виготовлення якихось деталей визначаються кілька параметрів, що характеризують об'єкти (довжину, діаметр тощо), які є випадковими величинами, значення яких наперед не можна передбачити. В даному випадку, ми маємо справу з багатовимірними випадковими величинами. На них поширюються ті ж означення, що були розглянуті для одновимірних.

Означення. Одночасна поява внаслідок проведення експерименту n випадкових величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$ із певною ймовірністю являє собою n-***вимірну випадкову величину***, яку називають також ***системою*** n ***випадкових величин***.

Позначимо через (X, Y) *двовимірну випадкову величину*. Кожну із величин X і Y називають ***складовою*** (компонентою).

СИСТЕМА ДВОХ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН (X,Y) ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Законом розподілу двох дискретних випадкових величин називають перелік усіх можливих значень $X = x_i, Y = y_i$ та відповідних їм ймовірностей спільної появи.

У табличній формі цей закон запишеться так:

$Y = y_i$ \ $X = x_i$	x_1	x_2	x_3	...	x_m
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	...	p_{1m}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	...	p_{2m}
...	...	...	...	...	...
y_k	p_{k1}	p_{k2}	p_{k3}	...	p_{km}

Умова нормування: $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 = \sum_{i=1}^{k} py_i = \sum_{j=1}^{m} px_j = 1.$

Приклад. Знайти закон розподілу складових двовимірної випадкової величини, заданої таблицею:

Y \ X	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Складемо ймовірність по стовпцях: $P(x_1) = 0{,}16$, $P(x_2) = 0{,}48$, $P(x_3) = 0{,}36$.

Закон розподілу для складової X :

X	x_1	x_2	x_3
p	0,16	0,48	0,36

$$\sum_{j=1}^{3} px_j = 0{,}16 + 0{,}48 + 0{,}36 = 1.$$

Складемо ймовірність по рядках:

Y	y_1	y_2
p	0,60	0,40

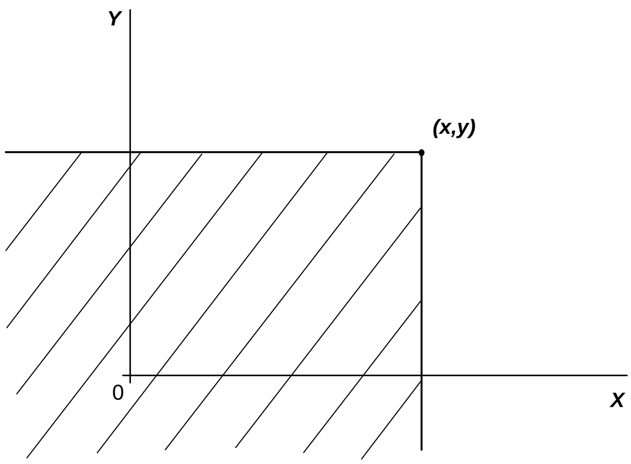
$$\sum_{i=1}^{2} py_i = 0{,}60 + 0{,}40 = 1.$$

ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ДВОМІРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Нехай (X,Y) - *двомірна випадкова величина.*

Функцією розподілу двомірної випадкової величини (X,Y) називають функцію $F(x,y)$, що визначає для кожної пари чисел x, y ймовірність того, що X прийме значення менше x, і при цьому Y прийме значення, менше y :

$$\boxed{F(x,y) = P(X < x;\ Y < y)}.$$



Геометричний зміст: $F(x,y)$ - ймовірність того, що випадкова точка (X,Y) попаде в нескінченний квадрат з вершиною (x,y), розташований лівіше і нижче цієї вершини.

<u>Властивості:</u>

1) $0 \le F(x,y) \le 1$.

2) Функція неспадна по кожному із аргументів:

$F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$, якщо $x_2 \ge x_1$,

$F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$, якщо $y_2 \ge y_1$.

3. Мають місце граничні співвідношення:

а) $F(-\infty;y) = 0$; в) $F(x;-\infty) = 0$;

б) $F(-\infty;-\infty) = 0$; г) $F(\infty;\infty) = 1$.

4. При $y = \infty$ функція розподілу стає функцією розподілу від X: $F(x;\infty) = F_1(x)$.

При $x = \infty$ функція розподілу залежить від Y: $F(\infty; y) = F_2(y)$.

5. Ймовірність влучення точки (X,Y) у довільний прямокутник $\left(a < X < b;\ c < Y < d\right)$ обчислюється так:

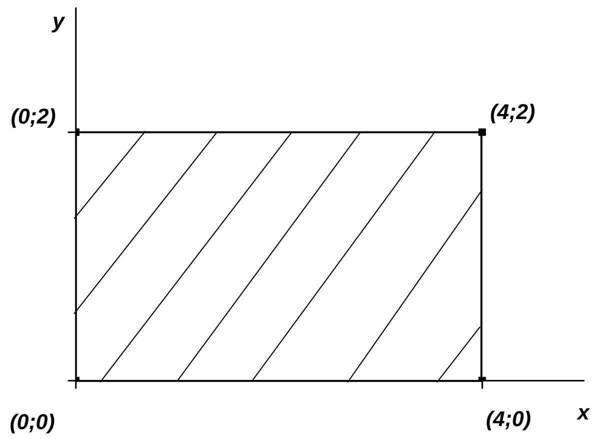
$$P\left(a < x < b;\ c < y < d\right) = F(b;d) + F(a;c) - F(a;d) - F(b;c).$$

Приклад. Закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин (X,Y) задано функцією розподілу:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & x \le 0,\ y \le 0 \\ 1 - e^{-2x} - e^{-3y} + e^{-2x-3y}, & x > 0,\ y > 0 \end{cases}.$$

Обчислити $P\left(0 < x < 4;\ 0 < y < 2\right)$.

Розв'язання. Зобразимо відповідну графічну схему:



За властивістю 5:

$$P\left(0 < x < 4;\ 0 < y < 2\right) = F(4;2) + F(0;0) - F(0;2) - F(4;0) = 1 - e^{-6} - e^{-8} + e^{-14}.$$

ЩІЛЬНІСТЬ ДВОМІРНОЇ НЕПЕРЕРВНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Щільністю спільного розподілу ймовірності $f(x,y)$ ***двомірної неперервної випадкової величини*** (X,Y) називають другу мішану частинну похідну від функції розподілу:

$$\boxed{f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}}.$$

Геометричний зміст: це є поверхня, яку називають ***поверхнею розподілу***.

Приклад. Знайти щільність $f(x,y)$ системи випадкових величин (X,Y), якщо задана функція розподілу $F(x,y) = \sin x \sin y \quad \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y \quad \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Знаючи $f(x,y)$, можна знайти $F(x,y)$:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy.$$

<u>Властивості</u> $f(x,y)$**:**

1. $f(x,y)\geq 0$.

2. $\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = 1$ - *умова нормування.*

3. Ймовірність розміщення ймовірностей системи змінних (x,y) у прямокутній області $D=(a<x<b,\ c<y<d)$:

$$P(a<x<b,\ c<y<d)=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy.$$

4. Щільність розподілу однієї із складових:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \text{ і } f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН X,Y, ЩО УТВОРЮЮТЬ СИСТЕМУ (X,Y)

(X,Y) - <u>дискретна</u>. $M(X)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_j p_{ij}$; $M(Y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i p_{ij}$.

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_j^2 p_{ij}-M^2(X).$$

$$D(Y)=M\left(Y^2\right)-M^2(Y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i^2 p_{ij}-M^2(Y).$$

$\sigma(X)=\sigma_x=\sqrt{D(X)}$; $\sigma(Y)=\sigma_y=\sqrt{D(Y)}$.

(X,Y) - <u>неперервна</u>. $M(X)=\iint_{\Omega} xf(x,y)dxdy$, $M(Y)=\iint_{\Omega} yf(x,y)dxdy$.

$D(X)=\iint_{\Omega} x^2 f(x,y)dxdy - M^2(X)$, $D(Y)=\iint_{\Omega} y^2 f(x,y)dxdy - M^2(Y)$.

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ МОМЕНТ КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Щоб з'ясувати наявність зв'язку між випадковими величинами X і Y та його характер, застосовують ***кореляційний момент***:

$\boxed{K_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i x_j p_{ij}-M(X)M(Y)}$, якщо X,Y - <u>дискретні</u>;

$$\boxed{K_{xy} = \iint\limits_{\Omega} xyf(x,y)dxdy - M(X)M(Y)},$$ якщо X, Y - неперервні.

Коли $K_{xy} = 0$, то зв’язок між величинами X та Y відсутній. Коли $K_{xy} \neq 0$, то між величинами X та Y існує кореляційний зв’язок.

Для характеристики кореляційного зв’язку вводять ***коефіцієнт кореляції***:

$$\boxed{r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}}.$$

$|r_{xy}| \leq 1$, або $-1 \leq |r_{xy}| \leq 1$.

Лекція 9

УМОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ СИСТЕМИ ДВОХ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини X ***при фіксованому значенні*** $Y = y_j$ називають перелік можливих значень випадкової величини $X = x_i$ та відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні $Y = y_j$.

$$\boxed{P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{y_j}}}.$$

Умова нормування:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i / Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{ij}}{p_{y_j}} = \frac{1}{y_j} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \frac{p(y_j)}{p(y_j)} = 1.$$

Приклад. Дискретна двомірна випадкова величина задана таблицею:

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Знайти умовний закон розподілу X при умові, що складова Y прийняла значення y_1.

Розв’язання. $P(X = x_i / Y = y_1) = \dfrac{P(X = x_i, Y = y_1)}{P(Y = y_1)}$.

$P(Y = y_1) = 0{,}1 + 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}60$.

$P(X = x_1 / Y = y_1) = \dfrac{0{,}10}{0{,}60} = \dfrac{1}{6}$;

$P(X = x_2 / Y = y_1) = \dfrac{0{,}30}{0{,}60} = \dfrac{1}{2}$;

$P(X = x_3 / Y = y_1) = \dfrac{0{,}20}{0{,}60} = \dfrac{1}{3}$.

Можна ще записати: $p(x_1/y_1)=\frac{1}{6}$; $p(x_2/y_1)=\frac{1}{2}$; $p(x_3/y_1)=\frac{1}{3}$.

Умовне математичне сподівання

$$M(X/Y=y_i)=\sum_{j=1}^{m} x_j P(X=x_j/Y=y_i);\; M(Y/X=x_i)=\sum_{j=1}^{m} y_j P(Y=y_j/X=x_i).$$

$$D(X/Y=y_i)=\frac{\sum_{j=1}^{m} x_j^2 P_{ij}}{P_{y_j}}-M^2(X/Y=y_i);\; D(Y/X=x_i)=\frac{\sum_{j=1}^{m} y_j^2 P_{ij}}{P_{x_i}}-M^2(Y/X=x_i).$$

Умовною щільністю $f(x/y)$ ***розподілу складових*** X ***при даному значенні*** $Y=y$ називають відношення щільності спільного розподілу $f(x,y)$ системи (X,Y) до щільності $f_2(y)$ складової Y: $\boxed{f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}}$.

Аналогічно: $\boxed{f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}}$.

Звідси $f(x,y)=f_1(x)\cdot f(y/x)=f_2(y)\cdot f(x/y)$.

Умовне математичне сподівання:

$$M(X/y)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x/y)dx;\; M(Y/x)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x)dy.$$

Дисперсія:

$$D(X/y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x/y)dx-M^2(X/y);\; D(Y/x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y/x)dy-M^2(Y/x).$$

Залежні і незалежні випадкові величини

Дві випадкові величини X та Y називають незалежними, якщо

$$\boxed{F(x,y)=F(x)\cdot F(y)}.$$

Для неперервних випадкових величин X та Y умову незалежності через щільність виражають так:

$$\boxed{f(x,y)=f(x)\cdot f(y)}.$$

Залежність між випадковими величинами означає *аналітичну* залежність щільності умовного розподілу однієї з них від значень, яких набуває друга величина. Таку залежність називають ***стохастичною*** або ***імовірнісною***.

Якщо X та Y незалежні, то $K_{xy}=0$ і $r_{xy}=0$.

$r_{xy}=0$ є необхідною, але не достатньою умовою незалежності випадкових величин.

ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

Розглянемо *двомірну випадкову величину* (X,Y). Виразимо Y у вигляді лінійної функції величини X:

$Y \approx g(X)+\alpha(X)+\beta$, де α і β - невідомі параметри.

Функцію $g(X)$ називають ***середньоквадратичною регресією*** Y ***на*** X.

$g(X)$ можна представити у вигляді:

$$g(X)=m_y+r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-m_x),$$

де $m_x=M(X)$, $m_y=M(Y)$, $\sigma_x=\sqrt{D(X)}$, $\sigma_y=\sqrt{D(Y)}$, $r_{xy}=\dfrac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$ - *коефіцієнт кореляції величин* X *та* Y.

Коефіцієнт $\rho_{xy}=r_{xy}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ називають ***коефіцієнтом регресії*** Y ***на*** X. Якщо коефіцієнт кореляції $r_{xy}=\pm 1$, то Y і X зв'язані *лінійною* функцією.

Аналогічно можна виразити X через Y.

Лекція 10
ФУНКЦІЇ ВІД ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНТІВ

Якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y, то Y називають ***функцією від випадкового аргументу*** X, тобто $\boxed{Y=\varphi(X)}$.

Знайдемо розподіл функції за відомим розподілом дискретного і неперервного аргументу.

1) X - *дискретна випадкова величина*.

а) Якщо різним можливим значенням аргументу X відповідають різні можливі значення функції Y, то ймовірності відповідних значень X і Y рівні між собою.

Приклад. X - дискретна випадкова величина, задана розподілом:

X	2	3
p	0,6	0,4

Знайти розподіл функції $Y=X^2$.

Розв'язання. Знайдемо можливі значення Y: $y_1=2^2=4$, $y_2=3^2=9$.

Тоді шуканий розподіл:

Y	4	9
p	0,6	0,4

б) Якщо різним можливим значенням X відповідають значення Y, серед яких є рівні між собою, то необхідно додавати ймовірності значень Y, які повторюються.

Приклад. Задано розподіл дискретної випадкової величини X:

X	-2	2	3
p	0,4	0,5	0,1

Знайти розподіл функції $Y = X^2$.

Розв'язання. Ймовірність можливого значення $y_1 = 4$ рівна ймовірності несумісних подій $X = -2$, $X = 2$, тобто $0{,}4 + 0{,}5 = 0{,}9$, а ймовірність $y_2 = 3^2 = 9$ рівна 0,1. Тоді шуканий розподіл:

Y	4	9
p	0,9	0,1

2) X - *неперервна випадкова величина.*

Постає питання – як знайти $Y = \varphi(X)$?

Якщо $y = \varphi(X)$ - диференційована, строго монотонна, обернена до неї $x = \psi(y)$, то щільність розподілу $g(y)$ неперервної випадкової величини Y знаходиться з допомогою рівності:

$$\boxed{g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|}.$$

Приклад. X - розподілена нормально, причому $a = 0$. Знайти розподіл функції $Y = X^3$.

Розв'язання. $y = x^3$ - диференційована, зростаюча, монотонна, тоді застосуємо формулу: $g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|$.

Знайдемо функцію, обернену $y = x^3$: $\psi(y) = x = y^{\frac{1}{3}}$.

Знайдемо $f[\psi(y)]$. За умовою $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, тому

$$f[\psi(y)] = f\left[y^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}}.$$

Знайдемо $\psi'(y) = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$.

Тоді шукана щільність розподілу:

$$g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sigma y^{\frac{2}{3}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}}.$$

Математичне сподівання функції одного випадкового аргументу

Нехай задана функція $Y = \varphi(X)$.

1) X - *дискретна випадкова величина* із можливими значеннями $x_1, x_2, ..., x_n$, ймовірності яких відповідно рівні $p_1, p_2, ..., p_n$. Очевидно, що Y - також дискретна і приймає значення $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, ..., $y_n = \varphi(x_n)$ і ймовірності можливих значень рівні $p_1, p_2, ..., p_n$. Тоді математичне сподівання функції:

$$\boxed{M(Y) = M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i}.$$

Приклад. Дискретна випадкова величина X задана розподілом:

X	1	3	5
p	0,2	0,5	0,3

Знайти математичне сподівання функції $Y = \varphi(X) = X^2 + 1$.

Розв'язання. Знайдемо можливі значення Y:

$\varphi(1) = 1^2 + 1 = 2$, $\varphi(3) = 3^2 + 1 = 10$, $\varphi(5) = 5^2 + 1 = 26$.

Тоді $M(Y) = M\left[X^2 + 1\right] = 2 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}5 + 26 \cdot 0{,}3 = 13{,}2$.

2) X - *неперервна*. $f(x)$ - задана щільність розподілу.

$$\boxed{M(Y) = M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx}.$$

Приклад. Щільність розподілу дискретної випадкової величини X рівна $f(x) = \sin x$ в інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. За межами цього інтервалу $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання $Y = \varphi(X) = X^2$.

Розв'язання. За умовою $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = x^2$.

Тоді

$$M(Y) = M[\varphi(X)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \\ du = 2x dx \end{array} \right| = -\underset{\underset{0}{\Downarrow}}{x^2 \cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = 2x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \pi + 2\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$

ФУНКЦІЯ ДВОХ ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНТІВ. РОЗПОДІЛ СУМИ

Якщо кожній парі можливих значень випадкових величин X і Y відповідає одне можливе значення випадкової величини Z, то Z називають ***функцією від двох випадкових аргументів*** X ***та*** Y:

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Знайдемо *розподіл функції* $Z = X + Y$. Така задача часто зустрічається на практиці. Наприклад, X - похибка показів приладу, Y - похибка округлення до найближчої поділки шкали; X розподілена нормально, Y - рівномірно.

1) X і Y - *дискретні незалежні величини*. Щоб знайти $Z = X + Y$, знаходимо всі можливі значення Z і їхні ймовірності.

Приклад. Задані закони розподілу незалежних дискретних випадкових величин:

X	1	2
p	0,4	0,6

Y	3	4
p	0,2	0,8

Скласти розподіл випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язання. Знайдемо всі можливі значення Z:

$z_1 = 1+3=4;\ z_2 = 1+4 = 5;\ z_3 = 2+3 = 5;\ z_4 = 2+4 = 6$.

Оскільки події незалежні, то за теоремою множення

$p(z_1) = p(4) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$;

$p(z_2) = p(5) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$;

$p(z_3) = p(5) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$;

$p(z_4) = p(6) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.

Оскільки $z_2 = z_3$, то ймовірності необхідно додати ($0{,}32 + 0{,}12 = 0{,}44$).

Тоді

Z	4	5	6
p	0,08	0,44	0,48

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}08 + 0{,}44 + 0{,}48 = 1.$$

2) X і Y - *неперервні*. Тоді щільність розподілу суми $Z = X + Y$ знаходиться за формулою:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \cdot f_2(z-x)dx \text{ або}$$

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y) \cdot f_2(y)dy.$$

Приклад. Незалежні величини X та Y задані щільностями:

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}},\ (0 \le x < +\infty);\ f(y) = \frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}},\ (0 \le y < +\infty).$$

Знайти $Z = Y + X$.

Розв'язання.

$$g(z) = \int_0^z f_1(x) \cdot f_2(z-x)dx = \int_0^z \left[\left(\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}e^{-\frac{(z-x)}{4}}\right)\right]dx = \frac{1}{12}e^{-\frac{z}{4}}\int_0^z e^{-\frac{x}{3}+\frac{x}{4}}dx =$$

$$= \frac{1}{12}e^{-\frac{z}{4}}\int_0^z e^{-\frac{x}{12}}dx = e^{-\frac{z}{4}}\left(1 - e^{-\frac{z}{12}}\right).$$

Оскільки $x \ge 0$, $y \ge 0$, то також і $z \ge 0$.

РОЗПОДІЛ “ χ^2 – ХІ-КВАДРАТ”

Нехай $X_i \ (i = 1, 2, ..., n)$ - нормальні незалежні випадкові величини, причому $M(X_i) = 0$, $\sigma(X_i) = 1$.

Тоді сума квадратів цих величин $\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ - ***розподілена по закону*** χ^2 ***(“хі-квадрат”) з*** $k = n$ ***ступенями вільності***.

Щільність цього розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad при \ \ x \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}, \quad при \ \ x > 0, \end{cases}$$

де $\boxed{\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt}$ - називають ***гамма-функцією***. $\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$

Числові характеристики цього розподілу:

$M(X) = k$, $D(X) = 2k$, $\sigma(X) = \sqrt{2k}$.

Звідси видно, що розподіл “хі-квадрат” визначається одним параметром – числом ступенів вільності k. Чим менше відхилення від закону χ^2, тим краще є наближення до нормального розподілу.

РОЗПОДІЛ СТЬЮДЕНТА

Z – нормальна випадкова величина, $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$, V - незалежна від Z величина, розподілена за законом χ^2 із k ступенями вільності. Тоді величина $\boxed{T = \dfrac{Z}{\sqrt{V/k}}}$ - називається t - ***розподілом*** або ***розподілом Стьюдента***.

Із ростом k (числа ступенів вільності) розподіл Стьюдента швидко наближається до нормального.

РОЗПОДІЛ F ФІШЕРА–СНЕДЕКОРА

Якщо U і V - незалежні випадкові величини, розподілені за законом χ^2 із ступенями вільності k_1 і k_2, то величину $\boxed{F = \dfrac{U/k_1}{V/k_2}}$ - називають ***розподілом*** F ***Фішера–Снедекора зі ступенями вільності*** k_1 ***і*** k_2.

Щільність цього розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \;\; x\le 0\\ C_0\dfrac{x^{\frac{k-2}{2}}}{(k_2+k_1x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & при \;\; x>0\end{cases}, \qquad \text{де} \;\; C_0=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{\frac{k_1}{2}}k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}.$$

Лекція 11
ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

Як відомо, не можна наперед передбачити, яке значення прийме випадкова величина. Але виявляється, що при деяких умовах сумарна поведінка досить великого числа випадкових величин втрачає випадковий характер і стає *закономірною*. Для практики важливо знати ці умови. Про ці умови вказується в теоремах, які носять назву ***закону великих чисел***. Для доведення цих теорем використовують *нерівність Чебишова*.

Нерівність Чебишова

Якщо випадкова величина X має обмежені $M(X)$, $D(X)$, то ймовірність відхилення цієї величини від свого математичного сподівання, взятого за абсолютною величиною ε $(\varepsilon>0)$, не перевищуватиме величини $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, тобто

$$\boxed{P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}}.$$

Цю нерівність приймемо без доведення.

Приклад. Ймовірність появи випадкової події в кожному із 400 незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,9. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність події $P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)$, якщо $\varepsilon=10$.

Розв'язання. За умовою $n=400$, $p=0{,}9$, $q=0{,}1$, $\varepsilon=10$. Оскільки випадкова величина має біноміальний розподіл, то

$M(X)=np=400\cdot 0{,}9=360;$

$D(X)=npq=360\cdot 0{,}1=36;$

$P\left(\left|X-360\right|<10\right)\ge 1-\dfrac{36}{100}=0{,}64.$

Теорема Чебишова

Нехай задано n незалежних величин $X_1, X_2, ..., X_n$, які мають обмежені $M(X_i)$ $(i=1,2,...,n)$ і дисперсії $D(X_i)$ не перевищують деякої сталої C $(C>0)$, тобто $D(X_i)\le C$. Тоді для будь-якого малого додатного числа ε ймовірність відхилення середнього арифметичного цих величин

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$$

від середнього арифметичного їх математичних сподівань

$$M(\overline{X}) = \frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}$$

взятого за абсолютним значенням на величину ε, прямуватиме до 1 із збільшенням n:

$$\boxed{\lim P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1}.$$

Нерівність Чебишова для теореми Чебишова *має вигляд*:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}\right) = 1}.$$

Приклад. Внаслідок медогляду 900 допризовників було виявлено, що середня маса кожного з них на 1,2кг більша від середньої маси попереднього призову. Чи можна це констатувати як випадковість, якщо середнє відхилення маси допризовника дорівнює 8кг?

Розв'язання. Використаємо нерівність Чебишова для теореми Чебишова:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum_{i=1}^{900} M(X_i)}{900}\right| < 1{,}2\right) \geq 1 - \frac{8}{900\cdot 1{,}2^2} = 1 - 0{,}0062 = 0{,}9938.$$

Оскільки ця ймовірність близька до одиниці, то відхилення маси можна вважати невипадковим.

Наслідок із теореми. Середнє арифметичне досить великого числа незалежних випадкових величин (дисперсія яких рівномірно обмежена) втрачають характер випадкової величини.

На теоремі Чебишова базується широко застосовний у статистиці метод вибірки, суть якого полягає в тому, що при порівнянні за невеликою випадково взятою вибіркою судять про всю сукупність досліджуваних об'єктів. Наприклад, визначення якості зерна по невеликій пробі. В цьому випадку число випадково вибраних зерен є малим у порівнянні зі всією масою зерна, але само по собі є достатньо великим.

Теорема Бернуллі

Якщо ймовірність появи випадкової події A в кожному з n незалежних випробувань є величиною сталою і дорівнює p, то при необмеженому збільшенні числа експериментів $n \to \infty$ ймовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A)$ від ймовірності p, взятої за абсолютною величиною на ε $(\varepsilon > 0)$ прямуватиме до 1 із зростанням n:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|W(A)-p\right|<\varepsilon\right)=1\ .$$

Нерівність Чебишова для теореми Бернуллі *має вигляд*:

$$\boxed{P\left(\left|W(A)-p\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{npq}{n^2\varepsilon^2}\Rightarrow P\left(\left|W(A)-p\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}}.$$

Приклад. Ймовірність виготовлення стандартної деталі 0,95. Контролю підлягає 400 деталей. Оцінити ймовірність відхилення відносної частоти появи стандартної деталі $W(A)$ від ймовірності 0,95 не більше ніж на величину 0,02.

Розв'язання. $p=0{,}95$, $q=0{,}05$, $n=400$.

$$P\left(\left|W(A)-0{,}95\right|<0{,}02\right)\ge 1-\frac{0{,}95\cdot 0{,}05}{400\cdot 0{,}02^2}=1-0{,}2969=0{,}7031.$$

Центральна гранична теорема Ляпунова

Розглянемо один із найпростіших варіантів цієї теореми.

<u>Теорема</u> (без доведення). Нехай задано n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, кожна із яких має один і той самий закон розподілу ймовірностей $M(X_i)=0$, $\sigma(X_i)=\sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|\nu_3|=\left|M\left(X^3\right)\right|$, тоді із зростанням числа n закон розподілу $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ наближається до нормального.

Приклад. Кожна із 100 незалежних випадкових величин X_i має рівномірний закон розподілу на проміжку $[0; 0{,}12]$. Записати наближений закон розподілу для випадкової величини $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

Розв'язання. Числові характеристики для рівномірного розподілу:

$M(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Тобто для X_i:

$M(X_i)=\dfrac{0+0{,}12}{2}=0{,}06$; $D(X_i)=\dfrac{(0{,}12-0)^2}{12}=\dfrac{0{,}12\cdot 0{,}12}{12}=0{,}0012$.

Тоді

$$M(Y)=M\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)=\sum_{i=1}^{100}M(X_i)=100\cdot 0{,}06=6;$$

$$D(Y)=D\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)=\sum_{i=1}^{100}D(X_i)=100\cdot 0{,}0012=0{,}12;$$

$$\sigma_y=\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{0{,}12}\ .$$

На підставі центральної граничної теореми маємо:

$$f(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-M(Y))^2}{2\sigma_y}}=\frac{1}{\sqrt{0,24\pi}}e^{-\frac{(y-6)^2}{\sqrt{0,48}}},\ -\infty<y<+\infty.$$

Лекція 12
ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ

Є дві основні задачі, для вирішення яких потрібно використовувати *теорію випадкових функцій*.

Пряма задача. Задані якісь початкові характеристики і ймовірність характеристик, що поступають "на вхід" функції (сигналу, процесу); необхідно знайти вихідні характеристики (сигналу, процесу).

Обернена задача. Задані вхідні і вихідні характеристики функції. Необхідно знайти всі параметри функції, які здійснюють перетворення вхідних характеристик функції у вихідні.

Означення. ***Випадковою функцією*** називають функцію невипадкового аргументу t, яка при кожному фіксованому значенні аргументу являється випадковою величиною. Випадкові функції від аргументу t позначають $X(t)$, $Y(t)$ і т.д.

Наприклад, якщо U - випадкова величина, то функція $X(t)=t^2U$ - випадкова. Так, при $t_1=2$, $X_1=4U$ буде випадковою. При $t_2=1{,}5$ $X_2=2{,}25U$ також випадкова і т.д.

Перерізом випадкової функції називають випадкову величину, яка відповідає фіксованому значенню аргументу випадкової функції.

Наприклад, для функції $X(t)=t^2U$ значення аргументу $t_1=2$ і $t_2=1{,}5$ отримуємо відповідні випадкові величини $X_1=4U$ і $X_2=2{,}25U$, які і є перерізами даної функції.

Реалізацією випадкової функції $X(t)$ називають невипадкову функцію аргументу t, рівною якій може бути випадкова функція в результаті випробувань.

Реалізацію функції $X(t)$ позначають $x_1(t)$, $x_2(t)$ і т.д.

Наприклад, $X(t)=U\sin t$ і в першому випробуванні $u_1=3$, в другому $u_2=4{,}6$, то реалізаціями $X(t)$ будуть $x_1(t)=3\sin t$ і $x_2(t)=4{,}6\sin t$.

Випадковим (стохастичним) процесом називають випадкову функцію аргументу t, яка використовує t як час.

Приклад. Літак повинен летіти із сталою швидкістю, але внаслідок дії випадкових факторів (вітру, температури, коливань тощо), врахування яких наперед неможливе, швидкість змінюється. Отже, тут швидкість – випадкова функція від неперервного змінного аргументу часу t. Тобто швидкість – випадковий процес. Аргумент t може бути і іншою величиною, не обов'язково часом.

Задати випадкову функцію аналітичним виразом практично неможливо.

КОРЕЛЯЦІЙНА ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Для задання випадкової функції досить задати *закон її розподілу*, в окремому випадку *одномірну щільність ймовірності*.

Для випадкової величини $X_1 = X(t_1)$ задають щільність $f(x_1)$ або $f(x_1;t_1)$. Аналогічно для перерізів $X_2 = X(t_2)$, $X_3 = X(t_3)$ і т.д. через $f(x_2;t_2)$, $f(x_3;t_3)$ і т.д.

Приклад. Випадкова функція $X(t)$ розподілена нормально з параметрами $a(t) = 4$, $\sigma(t) = 3$, тоді $f(x;t) = \dfrac{1}{3|t|\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4t)^2}{2(3|t|)^2}}$.

Хоча функція $f(x;t)$ повністю характеризує окремо взятий переріз, не можна сказати, що вона повністю описує і саму випадкову функцію.

У простішому випадку вивчають два перерізи $X_1 = X(t_1)$ і $X_2 = X(t_2)$, тобто вивчають систему двох випадкових величин (X_1, X_2) із двома щільностями $f(x_1;x_2)$.

Кореляційною теорією випадкових функцій називають теорію, яка базується на вивченні моментів першого і другого порядку.

На відміну від випадкових величин, для яких моменти є числами і тому їх називають *числовими характеристиками*, моменти випадкових функцій являють собою невипадкові функції (їх називають ***характеристиками випадкової функції***).

До характеристик випадкової функції *належать*: математичне сподівання, дисперсія, кореляційний момент.

Математичним сподіванням випадкової функції $X(t)$ називають невипадкову функцію $m_x(t)$, значення якої при кожному фіксованому значенні аргументу t рівне математичному сподіванню перерізу, що відповідає тому ж фіксованому значенню аргументу:

$$\boxed{m_x(t) = M[X(t)]}.$$

Геометричний зміст математичного сподівання: це є "середня крива", навколо якої розташовані інші криві – реалізації.

Властивості:

1) якщо $\varphi(t)$ - невипадкова функція, то $M[\varphi(t)] = \varphi(t)$.

2) $M[\varphi(t)X(t)] = \varphi(t)M[X(t)] = \varphi(t)m_x(t)$.

3) $M[X(t) + Y(t)] = m_x(t) + m_y(t)$.

Приклад. Знайти математичне сподівання випадкової функції $X(t) = U\cos t$, де U - випадкова величина, $M(U) = 2$.

Розв'язання. $M[X(t)] = M[U\cos t] = \cos t M[U] = 2\cos t$. Тоді шукане математичне сподівання $m_x(t) = 2\cos t$.

Дисперсією випадкової функції $X(t)$ називають невипадкову невід'ємну функцію $D_x(t)$, значення якої при кожному фіксованому значенні аргументу t рівне дисперсії перерізу, що відповідає фіксованому значенню аргументу:

$$\boxed{D_x(t) = D[X(t)]}.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової функції:

$$\boxed{\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}}.$$

<u>Властивості дисперсії</u>:

1) якщо $\varphi(t)$ - невипадкова функція, то $D[\varphi(t)] = 0$.

2) $D[X(t) + \varphi(t)] = D_x(t)$.

3) $D[X(t)\varphi(t)] = \varphi^2(t)D_x(t)$.

Приклад. Знайти дисперсію випадкової функції $X(t) = U\sin t$, де U - випадкова величина, $D(U) = 6$.

Розв'язання. $D[X(t)] = D[U\sin t] = \sin^2 t \cdot D[U] = 6\sin^2 t$. Тоді $D_x(t) = 6\sin^2 t$.

Центрованою випадковою функцією називають різницю між випадковою функцією і її математичним сподіванням:

$$\boxed{\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)}.$$

Кореляційною функцією випадкової функції $X(t)$ називають невипадкову функцію $K_x(t_1, t_2)$ двох незалежних аргументів t_1 і t_2, значення яких при кожній парі фіксованих аргументів t_1 і t_2 рівне кореляційному моменту перерізів, що відповідають цим же фіксованим значенням цих аргументів:

$$\boxed{K_x(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right]}.$$

Приклад. $X(t) = Ut$ - випадкова функція, де U - випадкова величина, $M(U) = 4$, $D(U) = 10$. Знайти кореляційну функцію.

Розв'язання.

$m_x(t) = M[X(t)] = M(Ut) = tM(U) = 4t$; $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = Ut - 4t = t(U - 4)$;

$\overset{\circ}{X}(t_1) = (U - 4)t_1$; $\overset{\circ}{X}(t_2) = (U - 4)t_2$.

Звідси $K_x(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right] = M[(U - 4)t_1(U - 4)t_2] =$

$= t_1t_2M\left[(U - 4)^2\right] = t_1t_2D(U) = 10t_1t_2$.

<u>Властивості кореляційної функції</u>:

1) $K_x(t_2, t_1) = K_x(t_1, t_2)$;

2) Якщо $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, то $K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)$;

3) Якщо $Y(t) = X(t)\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - невипадковий множник, то $K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2)$;

4) $|K_x(t_1, t_2)| \le \sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}$.

$$\rho_x(t_1; t_2) = \frac{K_x(t_1; t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} = \frac{K_x(t_1; t_2)}{\sqrt{K_x(t_1; t_1)}\sqrt{K_x(t_2; t_2)}}$$

називають ***нормованою кореляційною функцією***.

$|\rho_x(t_1,t_2)| \le 1.$

Похідна випадкової функції

Похідною випадкової функції $X(t)$ називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу Δt, якщо $\Delta t \to 0$:

$$\boxed{X'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}}.$$

Випадкова функція $X(t)$ називається ***диференційованою***, якщо існує така функція $X'(t)$ і

$$\lim_{\Delta t \to 0} M\left[\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} - X'(t)\right]^2 = 0.$$

Інтеграл від випадкової функції

Інтегралом від випадкової функції $X(t)$ на відрізку $[0;t]$ називають границю інтегральної суми при прямуванні до нуля часткового інтервалу Δs_i максимальної довжини:

$$\boxed{Y(t) = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum X(s_i)\Delta s_i = \int_0^t X(s)ds},$$

де s - змінна інтегрування, щоб відрізнити від t.

Лекція 13
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ. ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

У тих випадках, коли явище знаходиться під дією багатьох факторів і неможливо виявити вплив усіх цих факторів, застосовують інший метод вивчення – *статистичний*, тобто систематизацію та обробку масових даних однорідних дослідів.

Предмет математичної статистики полягає у розробці методів збору та обробки статистичних даних для одержання наукових та практичних висновків.

Основна задача математичної статистики – розробка методів аналізу статистичних даних у залежності від мети дослідження.

Генеральна та вибіркова сукупності

Кожен об'єкт, який спостерігають, має декілька ознак. Розглядаючи лише одну ознаку кожного об'єкта, ми припускаємо, що інші ознаки *рівноправні*. Такі множини однорідних об'єктів називають ***статистичною сукупністю***. *Наприклад*, якщо досліджують партію деталей, то якісною ознакою може бути стандартність і нестандартність кожної деталі, а кількісною – розмір деталі.

Кількісні ознаки бувають ***неперервними*** і ***дискретними***.

Перевірку ознак об'єктів можна провести двома способами:

1) перевірка всіх об’єктів; 2) перевірка лише частини.

Вибірковою сукупністю (вибіркою) називають сукупність випадково взятих об’єктів. ***Генеральною*** називають сукупність об’єктів, з яких зроблено вибірку. ***Обсягом*** (об’ємом) ***сукупності*** (вибіркової або генеральної) називають кількість об’єктів всієї сукупності.

Приклад. Якщо з 5000 виробів для дослідження взяли 50, тоді об’єм генеральної сукупності $N = 5000$, а об’єм вибірки $n = 50$.

Вибірки бувають *повторні* та *безповторні*. ***Повторною*** називають вибірку, при якій відібраний об’єкт повертають до генеральної сукупності перед відбором інших. Вибірку називають ***безповторною***, якщо взятий об’єкт до генеральної сукупності не повертається.

Способи відбору

Усі способи відбору можна поділити на *два види*:

1) відбір, який не потребує розділення генеральної сукупності на частини (*простий випадковий безповторний відбір* і *простий випадковий повторний відбір*).

2) відбір, при якому генеральну сукупність розділяють на частини. Сюди відносять *типовий відбір*, *механічний відбір*, *серійний відбір*.

При ***типовому відборі*** об’єкти відбирають не з усієї генеральної сукупності, а лише з її типових частин.

При ***механічному відборі*** генеральну сукупність механічно поділяють на стільки частин, скільки має бути об’єктів у вибірці.

При ***серійному відборі*** об’єкти із генеральної сукупності відбираються не по одному, а серіями, які досліджуються.

СТАТИСТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИБІРКИ

Щоб побудувати статистичний розподіл, необхідно зробити первинну обробку даних, тобто згрупувати члени вибіркової сукупності, що приймають рівні значення ознаки або значення в середині певного інтервалу.

Приклад. Групування сукупності із 20 пар взуття, що були продані протягом 2 год.

Розмір взуття	38	39	40	41	42	43	44	Всього
Кількість проданих пар	1	3	3	6	4	2	1	20

Коли реалізовується вибірка, кількісна ознака, наприклад X, набуває конкретних числових значень $(X = x_i)$, яку називають ***варіантою***.

Зростаючий числовий ряд варіант називають ***варіаційним***.

Кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, ..., n_m$ називають ***рядом частот***.

При цьому ***обсяг вибірки*** $\boxed{n = \sum_{i=1}^{m} n_i}$. Відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n називають ***її відносною частотою***: $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$. Для кожної вибірки *виконується умова*: $\sum_{i=1}^{m} \omega_i = 1$.

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант та відповідних їм частот, тобто

x_i	x_1	x_2	...	x_m
n_i	n_1	n_2	...	n_m

або

x_i	x_1	x_2	...	x_m
ω_i	n_1 / n	n_2 / n	...	n_m / n

де n - обсяг вибірки, $x_1 < x_2 < ... < x_m$.

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна подати *емпіричною функцією* $F^*(x)$. Функцію аргументу x, що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто $\boxed{F^*(x) = \omega(X < x) = \dfrac{n_x}{n}}$, називають ***емпіричною функцією*** або ***комулятою***.

У даному випадку n_x - кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту x, n - обсяг вибірки.

Властивості $F^*(x)$:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F^*(x_{\min}) = 0$, де $x_{\min}$ є найменшою варіантою варіаційного ряду;

3) $F^*(x)\Big|_{x > x_{\max}} = 1$, де $x_{\max}$ є найбільшою варіантою варіаційного ряду;

4) $F^*(x)$ є неспадною функцією.

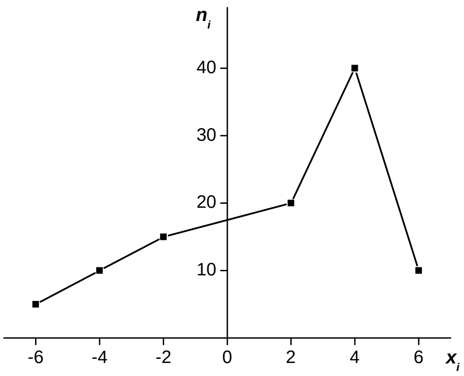
ПОЛІГОН ЧАСТОТ І ВІДНОСНИХ ЧАСТОТ

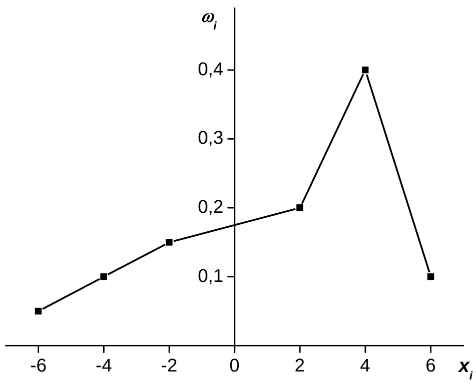
Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають координати точок $(x_i; n_i)$ або $(x_i; \omega_i)$. У першому випадку лінію називають ***полігоном частот***, а у другому – ***полігоном відносних частот***.

Приклад. За даним дискретним статистичним розподілом вибірки накреслити полігони частот і відносних частот.

x_i	-6	-4	-2	2	4	6
n_i	5	10	15	20	40	10
ω_i	0,05	0,1	0,15	0,2	0,4	0,1

Розв'язання.





Числові характеристики вибірки

Вибіркова середня величина $\bar{x}_B$: $\boxed{\bar{x}_B = \dfrac{\sum x_i n_i}{n}}$, де x_i - варіанта варіаційного ряду вибірки, n_i - частота цієї варіанти, n - обсяг вибірки $(n = \sum n_i)$.

Відхиленням варіант, називають різницю $(x_i - \bar{x}_B)$.

Модою (Мо) дискретного статистичного розподілу вибірки називають варіанту, що має найбільшу частоту появи.

Медіаною (Ме) дискретного статистичного розподілу вибірки називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант.

Дисперсія вибірки: $\boxed{D_B = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n} = \dfrac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2}$.

Середнє квадратичне відхилення вибірки: $\boxed{\sigma_B = \sqrt{D_B}}$.

Приклад. За даним статистичним розподілом вибірки

x_i	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5
n_i	10	20	30	30	10

обчислити $\bar{x}_B$, D_B, σ_B, Mo, Me.

Розв'язання. Оскільки $n = \sum n_i = 100$, то

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{2{,}5 \cdot 10 + 4{,}5 \cdot 20 + 6{,}5 \cdot 30 + 8{,}5 \cdot 30 + 10{,}5 \cdot 10}{100} = 6{,}7.$$

$$D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2 = \frac{2{,}5^2 \cdot 10 + 4{,}5^2 \cdot 20 + 6{,}5^2 \cdot 30 + 8{,}5^2 \cdot 30 + 10{,}5^2 \cdot 10}{100} - 6{,}7^2 = 5{,}16.$$

$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{5{,}16} \approx 2{,}27$.

$Mo = 6{,}5; 8{,}5$.

$Me = 6{,}5$, оскільки варіанта $x_3 = 6{,}5$ поділяє варіаційний ряд на дві частини.

Емпіричні моменти

Початковий емпіричний момент k***-го порядку*** ν_k^*, що визначає середнє зважене в степені k, обчислюється за формулою:

$$\boxed{\nu_k^* = \frac{\sum x_i^k n_i}{n}}, \text{ де } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Центральний емпіричний момент k***-го порядку*** μ_k^*, середнє зважене відхилення варіант у степені k, обчислюють за формулою:

$$\boxed{\mu_k^* = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^k n_i}{n}}.$$

Коефіцієнт асиметрії: $\boxed{A_s^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma_B^3}}$. Якщо $A_s^* = 0$, то варіанти симетрично розподілені відносно $\bar{x}_B$.

Ексцес: $\boxed{E_s^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3}$. Використовується для оцінки крутизни закону розподілу неперервної випадкової величини. Якщо $E_s^* < 0$, то будемо мати *туповершинний розподіл*. Якщо $E_s^* > 0$, то будемо мати *гостровершинний розподіл*. $E_s^* = 0$ - при *нормальному законі розподілу*.

Лекція 14

ТОЧКОВІ СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

Інформація, отримана на основі вибірки про означення генеральної сукупності завжди міститиме певні похибки, оскільки вибірка становитиме лише незначну частину від неї ($n < N$).

Тому вибірку треба організувати так, щоб отримана інформація була найбільш повною. Параметри генеральної сукупності $M(X) = \bar{X}_\Gamma$, D_Γ, σ_Γ, Mo, Me є величинами *сталими*, але їх числове значення невідоме. Параметри вибірки $\bar{x}_B$, D_B, σ_B, Mo^*, Me^*, які дістають при обробці вибірки, є величинами непередбачуваними, тобто *випадковими*. Схематично це виглядає так:

$$\left.\begin{matrix} \bar{X}_\Gamma \\ D_\Gamma \\ \sigma_\Gamma \\ Mo \\ Me \end{matrix}\right\} \theta \quad N \text{ – обсяг генеральної сукупності} \qquad \longrightarrow \qquad \left.\begin{matrix} \bar{x}_B \\ D_B \\ \sigma_B \\ Mo^* \\ Me^* \end{matrix}\right\} \theta^* \quad n<N \text{ – обсяг вибірки}$$

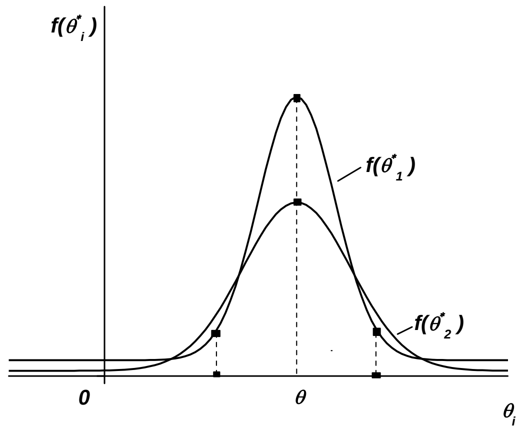
Тут θ - оціночний параметр генеральної сукупності, θ^* - його ***статистична оцінка***, яку називають ***статистикою***.

При цьому $\theta = const$, а θ^* - випадкова величина. Статистична оцінка θ^*, яка визначається одним числом, називається ***точковою***.

Якщо $M\left(\theta^*\right)=\theta$, то θ^* називають ***незміщеною***. Якщо $M\left(\theta^*\right)\neq\theta$, то статистичну оцінку θ^* називають ***зміщеною*** відносно параметру генеральної сукупності θ.

Різницю $\theta^* - \theta = \delta$ називають ***зміщенням статистичної оцінки***.

Приклад. Нехай $\theta = M(x)$ має дві незміщені точкові статистичні оцінки - θ_1^* і θ_2^*. Тоді щільності ймовірностей для θ_1^* і θ_2^* мають вигляд зображений на рисунку.



В околі θ оцінка θ_1^* частіше набуває значень, ніж оцінка θ_2^*. На "хвостах" навпаки. Порівнюючи дисперсії статистичних оцінок θ_1^* і θ_2^*, видно, що θ_2^* має меншу дисперсію, ніж θ_1^*.

Точкову статистичну оцінку називають ***ефективною***, якщо при заданому обсязі вибірки вона має *мінімальну* дисперсію. Отже, θ_2^* буде ще й *ефективною*.

Точкову статистичну оцінку називають ***ґрунтовною***, якщо у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки θ^* вона наближається до оцінювального параметра θ, а саме:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right) = 1}.$$

МЕТОД МОМЕНТІВ ДЛЯ ТОЧКОВОЇ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

Метод моментів полягає в прирівнюванні теоретичних моментів розглядуваного розподілу із відповідними емпіричними (досліджуваними) моментами того ж порядку.

1) **Оцінка одного параметру**.

Нехай задана щільність $f(x,\theta)$, яка визначається одним невідомим параметром θ. Необхідно знайти точкову оцінку параметра θ. Підкоряючись методу моментів запишемо: $\nu_1 = M_1$. Враховуючи, що $\nu_1 = M(X)$, а $M_1 = \overline{x}_B$, отримаємо:

$$M(X) = \overline{x}_B.$$

Математичне сподівання, як видно із співвідношення $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\theta)dx = \varphi(\theta)$ є функцією від θ.

Розв'язавши рівняння відносно θ, ми знайдемо його точкову оцінку θ^*, яка є функцією від $\bar{x}_B$, тобто від варіант вибірки:

$$\theta^* = \psi(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Приклад. Випадкова величина X має показниковий розподіл $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $(x \geq 0)$.

Нижче представлено емпіричний розподіл:

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
n_i	133	45	15	4	2	1

де x_i - варіанти вибірки цього розподілу, n_i - їхня частота. $\sum\limits_i n_i = 200$.

Знайти методом моментів точкову оцінку невідомого параметру показникового розподілу.

Розв'язання. Прирівняємо початковий теоретичний момент першого порядку до початкового емпіричного моменту першого порядку: $\nu_1 = M_1$, $\nu_1 = M(X)$, $M_1 = \bar{x}_B$. Звідси $M(X) = \bar{x}_B$.

Для показникового розподілу $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, отримаємо: $\dfrac{1}{\lambda} = \bar{x}_B \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{\bar{x}_B}$. Отже, шукана точкова оцінка параметру λ рівна оберненій вибірковій середній величині.

$$\lambda^* = \frac{1}{\bar{x}_B},\ \bar{x}_B = \frac{\sum\limits_i x_i n_i}{n} = 4{,}95,\ \lambda^* = \frac{1}{4{,}95} \approx 0{,}20.$$

2) Якщо розподіл визначається **двома параметрами**, то прирівнюють два теоретичні моменти двом відповідним емпіричним моментам того ж порядку. $\nu_1 = M_1$, $\mu_2 = m_2$, де μ_2 - центральний теоретичний момент 2-го порядку, m_2 - емпіричний момент 2-го порядку.

Врахуємо, що $\nu_1 = M_1$, $M(X) = \bar{x}_B$, $\mu_2 = D(X)$, $m_2 = D_B$, тоді будемо мати:

$$\begin{cases} M(X) = \bar{x}_B; \\ D(X) = D_B. \end{cases}$$

Математичне сподівання та дисперсія є функціями від θ_1^* і θ_2^*, тому розв'язавши систему відносно невідомих параметрів, ми отримаємо їхні точкові оцінки θ_1^* і θ_2^*.

МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ

Цей *метод полягає* у віднаходженні максимуму функції одного або кількох оцінюваних параметрів.

1. X - *дискретна випадкова величина*, яка в результаті n експериментів прийняла значення $x_1, x_2, ..., x_n$. Припустимо, що вигляд закону розподілу X є заданий, але невідомий параметр θ, який визначає цей закон. Необхідно знайти

точкову оцінку $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$. Нехай $p(x_i, \theta)$ - ймовірність у результаті одного випробування.

Функцією правдоподібності дискретної випадкової величини X називають функцію аргументу θ:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = \rho(x_1; \theta) \cdot \rho(x_2; \theta) \cdot ... \cdot \rho(x_n; \theta).$$

Оцінкою максимальної правдоподібності параметра θ називають таке його значення θ^*, при якому функція правдоподібності досягає максимуму.

Функції L і $\ln L$ досягають максимуму при одному і тому ж значенні θ.

Логарифмічною функцією правдоподібності називають функцію $\ln L$. Точку максимуму функції $\ln L$ можна знайти так:

1) знайти похідну $\dfrac{d \ln L}{d\theta}$;

2) із рівняння $\dfrac{d \ln L}{d\theta} = 0$, яке називають ***рівнянням правдоподібності***, знаходять критичну точку θ^*;

3) знаходять другу похідну $\dfrac{d^2 \ln L}{d\theta^2}$; якщо друга похідна при $\theta = \theta^*$ від'ємна, то θ^* - *точка максимуму*. Знайдену точку θ^* приймають у якості оцінки максимальної правдоподібності параметру θ.

2. X - *неперервна випадкова величина*. Нехай вигляд щільності $f(x)$ заданий, але невідомий параметр θ, яким визначається ця функція.

Функцією правдоподібності неперервної випадкової величини X називають функцію аргументу θ:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot ... \cdot f(x_n; \theta).$$

Оцінку максимальної правдоподібності невідомого параметра θ шукають так само як дискретної випадкової величини. Якщо щільність $f(x)$ визначається двома невідомими параметрами θ_1^* та θ_2^*, тоді

$$L = f(x_1; \theta_1, \theta_2) \cdot f(x_2; \theta_1, \theta_2) \cdot ... \cdot f(x_n; \theta_1, \theta_2).$$

Для знаходження максимуму розв'язують систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0; \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0. \end{cases}$$

Лекція 15
ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

Точкова статистична оцінка θ^* є випадкова величина, а тому при наближеній заміні θ на θ^* часто виникають істотні помилки, особливо коли обсяг вибірки малий. У цьому разі застосовують *інтервальні статистичні оцінки.*

Статистична оцінка, яка визначається двома числами, кінцями інтервалів, називається ***інтервальною***.

Різниця між статистичною оцінкою θ^* та її оцінювальним параметром θ, взята за абсолютним значенням, називається ***точністю оцінки***:

$$\left|\theta^* - \theta\right| < \delta, \quad (*),$$

де δ - *точність оцінки*. Оскільки θ^* є випадковою, то і δ буде випадковою, тому нерівність $(*)$ справджується із певною ймовірністю

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right) = \gamma,$$

де γ - величина, яка називається ***надійністю***.

Якщо розкрити модуль, то $P\left(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\right) = \gamma$. Інтервал $\left[\theta^* - \delta; \theta^* + \delta\right]$, що покриває оцінюваний параметр θ генеральної сукупності із заданою надійністю γ, називають ***довірчим***.

Введемо поняття *виправленої дисперсії* s^2. Математичне сподівання: $\boxed{M\left(\frac{n}{n-1} D_B\right) = D_\Gamma}$, де D_Γ - генеральна дисперсія. В якості оцінки генеральної дисперсії використовують ***виправлену дисперсію***, яку позначають через s^2:

$$\boxed{s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{n}{n-1} \frac{\sum\limits_i n_i \left(x_i - \bar{x}_B\right)^2}{n} = \frac{\sum\limits_i n_i \left(x_i - \bar{x}_B\right)^2}{n-1}}.$$

Величину $\boxed{s = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B}}$ називають ***виправленим середнім квадратичним відхиленням***.

ДОВІРЧІ ІНТЕРВАЛИ ДЛЯ ОЦІНКИ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ

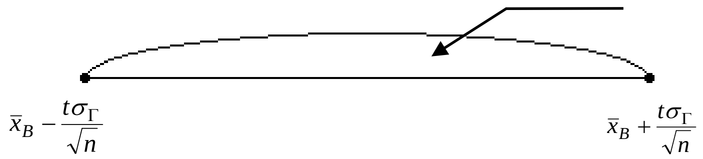
1. Інтервальною оцінкою (з надійністю γ) математичного сподівання a нормального розподілу при відомому середньому квадратичному відхиленні σ_Γ генеральної сукупності служить довірчий інтервал:

$$\boxed{\bar{x}_B - \frac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}},$$

де $\frac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} = \delta$ - точність оцінки, n - об'єм вибірки, t - значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$, при якому $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Умовно це можна зобразити так:

$\bar{X}_\Gamma = a$



<u>Примітка</u>. 1) Який зміст має задана надійність $\gamma = 0{,}95$?

Надійність $\gamma = 0{,}95$ вказує на те, що якщо проведено достатньо велике число вибірок, тоді 95% із них визначають такі довірчі інтервали, в яких досліджуваний параметр дійсно попадає. Лише у 5% випадках він може вийти за межі довірчого інтервалу.

2) Якщо необхідно оцінити математичне сподівання з наперед заданою точністю δ і надійністю γ, то мінімальний об'єм вибірки, який забезпечує цю точність, знаходять за формулою: $\boxed{n = \dfrac{t^2\sigma^2}{\delta^2}}$.

2. При невідомому σ_Γ (і об'єм вибірки $n < 30$) довірчий інтервал:

$$\boxed{\bar{x}_B - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}},$$

де s - виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення, t_γ знаходиться за таблицями по заданих n і γ.

3. Довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення σ_Γ нормального розподілу з надійністю γ за відомим виправленим вибірковим середнім квадратичним відхиленням s:

$$s(1-q) < \sigma_\Gamma < s(1+q) \text{ (при } q < 1\text{)},$$

$$0 < \sigma_\Gamma < s(1+q) \text{ (при } q > 1\text{)}.$$

q - шукаємо з таблиць.

q можна знайти із рівності:

$$\boxed{\int_{\chi_1}^{\chi_2} R(\chi, n)\,d\chi = \gamma}, \quad \text{де}$$

$$R(\chi, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{(n-3)}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \; \chi_1 = \frac{\sqrt{n-1}}{1+q}, \; \chi_2 = \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

4. Довірчий інтервал для невідомої ймовірності p біноміального розподілу по відносній частоті ω із наближеними кінцями p_1 і p_2:

$$\boxed{p_1 < p < p_2}, \text{ де}$$

$$p_1 = \frac{n}{t^2 + n}\left[\omega + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\,\right],$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left[\omega + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],$$ де n - загальне число випробувань, m - число появи події, ω - відносна частота $\left(\omega = \frac{m}{n}\right)$, t - значення аргументу функції Лапласа $\left(\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}\right)$, γ - задана надійність.

Приклад. Кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально. При вибірці обсягом $n = 16$ знайдене вибіркове середнє $\bar{x}_B = 20{,}2$ і виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 0{,}8$. Оцінити невідоме математичне сподівання при допомозі довірчого інтервалу з надійністю 0,95.

Розв'язання. Знайдемо t_γ. За табличними даними для $\gamma = 0{,}95$ і $n = 16$ знаходимо $t_\gamma = 2{,}13$. Знайдемо довірчі межі:

$$\bar{x}_B - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = 20{,}2 - \frac{2{,}13 \cdot 0{,}8}{\sqrt{16}} = 19{,}774, \quad \bar{x}_B + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = 20{,}2 + \frac{2{,}13 \cdot 0{,}8}{\sqrt{16}} = 20{,}626.$$

Отже, з надійністю $\gamma = 0{,}95$ невідомий параметр a міститься в довірчому інтервалі $19{,}774 < a < 20{,}626$.

Лекція 16
СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

Інформація, яку дістають на підставі вибірки, реалізованої із генеральної сукупності, може бути використана на формулювання певних суджень про всю генеральну сукупність. На основі даних суджень приймають певні рішення. Такі рішення називають ***статистичними***.

Приклад. Почали виготовляти для автомобілів покришки нового типу, відібрали певну їх кількість і піддають певним тестам. За результатами тестів роблять висновки чи нові покришки кращі від покришок старого типу, чи ні. А це, у свою чергу, дає підставу для прийняття рішення: виготовляти їх чи ні.

Статистичні рішення мають імовірнісний характер. Будь-які статистичні висновки, здобуті на підставі обробки вибірки, називають ***статистичними гіпотезами***.

Гіпотезу, яка підлягає перевірці, називають ***основною***. Оскільки ця гіпотеза припускає відсутність систематичних розбіжностей між невідомими параметрами генеральної сукупності і величиною, яка одержана внаслідок обробки вибірки, то її називають ***нульовою гіпотезою*** і *позначають* H_0. Зміст нульової гіпотези записують так: $H_0 : \bar{x}_\Gamma = a$, $H_0 : \sigma_\Gamma = 2$.

Кожній нульовій гіпотезі можна протиставити кілька ***альтернативних*** (конкуруючих) ***гіпотез***, які позначаються H_α, що заперечують твердження нульової. *Наприклад,* $H_0 : \bar{x}_\Gamma = a$, а альтернативна гіпотеза $H_\alpha : \bar{x}_\Gamma > a$, тобто заперечує твердження нульової.

Простою називають гіпотезу, що має тільки одне припущення. *Наприклад*, якщо λ - параметр показникового розподілу, то гіпотеза $H_0 : \lambda = 5$ - проста.

Складною називають гіпотезу, яка складається із скінченого або нескінченного числа простих гіпотез. *Наприклад*, $H_0 : \bar{x}_\Gamma \in [2;\ 2{,}1;\ 2{,}2]$ або $H_0 : \bar{x}_\Gamma \in [5{,}2 \div 6{,}5]$.

СТАТИСТИЧНИЙ КРИТЕРІЙ. ЕМПІРИЧНЕ (СПОСТЕРЕЖУВАНЕ) ЗНАЧЕННЯ КРИТЕРІЮ

Для перевірки нульової гіпотези використовують спеціально підібрану випадкову величину, закон розподілу якої відомий. Цю величину позначають U або Z, якщо вона розподілена нормально, F або V^2 - за законом Фішера-Снедокора, T - за законом Стьюдента, χ^2 - за законом "хі-квадрат". У загальних цілях цю величину позначимо через K.

Статистичним критерієм називають випадкову величину K, яка використовується для перевірки нульової гіпотези. *Наприклад*, для перевірки правильності $H_0 : \bar{x}_\Gamma = a$ як статистичний критерій можна взяти випадкову величину: $K = Z = \dfrac{\bar{x}_B - a}{\sigma(\bar{x}_B)} = \dfrac{\bar{x}_B - a}{\dfrac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}}$, яка має нормований нормальний закон розподілу ймовірності. При великих обсягах вибірки $(n > 30)$ закони розподілу статистичних критеріїв наближаються до нормального.

Спостережуване значення критерію, який позначають через K^*, обчислюють за результатом вибірки.

КРИТИЧНА ОБЛАСТЬ. ОБЛАСТЬ ПРИЙНЯТТЯ ГІПОТЕЗИ. КРИТИЧНА ТОЧКА

Множину Ω всіх можливих значень статистичного критерію K можна поділити на дві підмножини A і $\bar{A}$, які не перетинаються ($A \cup \bar{A} = \Omega$, $A \cap \bar{A} = \varnothing$).

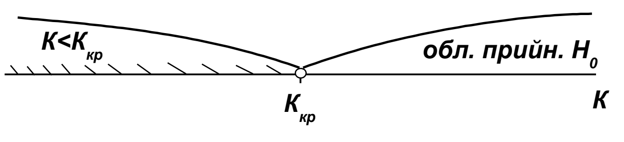
Сукупність значень статистичного критерію $K \in A$, за яких нульова гіпотеза не відхиляється, називають ***областю прийняття нульової гіпотези***.

Сукупність значень статистичного критерію $K \in A$, за яких нульова гіпотеза не приймається, називають ***критичною областю***. Отже, A - область прийняття H_0, $\bar{A}$ - критична область, де H_0 відхиляється.

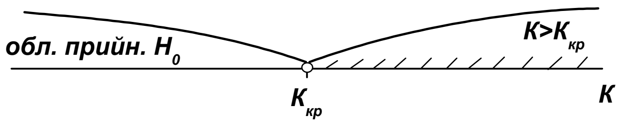
Точку або кількість точок, що поділяють множину Ω на підмножини A і $\bar{A}$, називають ***критичними*** і позначають $K_{кр}$.

Існують *три види критичних областей*:

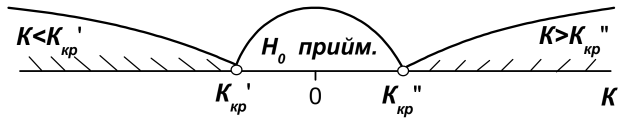
1) якщо $K < K_{кр}$, де відхиляється H_0, то маємо лівобічну критичну область;



2) якщо $\mathrm{K} > K_{кр}$, де відхиляється H_0, то маємо правобічну критичну область.



3) якщо при $\mathrm{K} < K'_{кр}$ і при $\mathrm{K} > K''_{кр}$ нульова гіпотеза відхиляється, то маємо двобічну критичну область.



$K'_{кр}$ і $K''_{кр}$ є симетричними відносно нуля.

У результаті перевірки гіпотез можуть бути допущені *помилки* двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна нульова гіпотеза. Ймовірність помилки першого роду називають ***рівнем значущості*** і позначають α.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна нульова гіпотеза. Ймовірність помилки другого роду позначають β.

Потужністю критерію називають ймовірність попадання критерію в критичну область при умові, що справедлива альтернативна гіпотеза. Іншими словами, потужність критерію є ймовірність того, що нульова гіпотеза буде відкинута, якщо справедлива альтернативна гіпотеза.

ЗАСТОСУВАННЯ КРИТЕРІЮ ПІРСОНА ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ГІПОТЕЗИ ПРО НОРМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ

Нехай емпіричний розподіл задано у вигляді послідовності рівновіддалених варіант і відповідних їм частот

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Необхідно перевірити гіпотезу, що генеральна сукупність X розподілена нормально.

Для цього потрібно:

1) Обчислити вибіркову середню $\overline{x}_B$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B.

2) Обчислити теоретичні частоти (*за правилом вирівнювання частот*):

$$\boxed{n'_i = \frac{nh}{\sigma_B}\varphi(u_i)},$$

де n - обсяг вибірки, h - крок (різниця між двома сусідніми варіантами), $u_i = \dfrac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}$, $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

3) Порівняти емпіричні і теоретичні частоти з допомогою ***критерію Пірсона***:

$$\boxed{\chi^2_{спост} = \sum_i \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}}.$$

4) За таблицею критичних точок розподілу χ^2, за заданим рівнем значущості α і числом ступенів вільності $k = s - 3$ (де s - число груп вибірки) знаходимо критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$ правосторонньої критичної області.

Якщо $\chi^2_{спост} < \chi^2_{кр}$, то гіпотеза H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності приймається.

Якщо $\chi^2_{спост} > \chi^2_{кр}$, то гіпотезу відхиляють.

Лекція 17
СТАТИСТИЧНА І КОРЕЛЯЦІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ

Статистичною називають залежність, при якій зміна однієї з величин веде до змін розподілу іншої. Зокрема, *статистична залежність* проявляється в тому, що при зміні однієї із величин змінюється середнє значення іншої; в цьому випадку статистичну залежність називають ***кореляційною***.

Приклад кореляційного зв'язку випадкової величини Y з величиною X. Нехай Y - урожай зерна, X - кількість добрив. З однакових площ землі при рівних кількостях внесених добрив отримують різний урожай, тобто Y не є функцією від X. Разом із тим, як показує досвід, середній врожай є функцією від кількості добрив, тобто Y зв'язаний із X кореляційною залежністю.

Показником, що вимірює стохастичний (випадковий) зв'язок між змінними є ***коефіцієнт кореляції***, який свідчить із певною мірою ймовірності, наскільки зв'язок між змінними близький до строгої лінійної залежності.

За наявності кореляційного зв'язку між змінними необхідно виявити його *форму функціональної залежності* (лінійна чи нелінійна), а саме:

$Y = aX + b$,

$Y = aX^2 + bx + c$,

$Y = \dfrac{a}{X} + b$,

$Y = ae^{bX}$ - експоненціальна залежність.

Наведені можливі залежності між змінними X і Y називають ***функціями регресії***.

МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Цей метод використовують для знаходження оцінок параметрів функціональної залежності $(a, b, c, ...)$ за даними вибірки. Він базується на тому, що найімовірніші значення параметрів $a, b, c, \ldots$ повинні давати мінімум функції:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f\left(x_i, a, b, c, \ldots\right) \right]^2 .$$

Функція S є неперервно диференційована, тому необхідною умовою існування мінімуму функції S є виконання рівностей, що утворюють систему рівнянь із невідомими $a, b, c, \ldots$:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial c} = 0,\ \ldots .$$

Оцінка параметрів лінійної функції

Нехай між випадковими величинами X та Y існує лінійна функціональна залежність $Y = aX + b$, параметри a і b якої невідомі. Запишемо функцію S:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b) \right)^2 .$$

За умовою існування лінійної функції повинні виконуватися рівності $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$. У нашому випадку ці рівності мають вигляд:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Розв’язавши отриману систему відносно двох невідомих a та b, можна знайти шукану лінійну залежність. Для інших функцій регресії невідомі коефіцієнти також можна визначати за методом найменших квадратів.

Лекція 18
ВИБІРКОВЕ РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ

Умовним середнім $\bar{y}_x$ називають середнє арифметичне значень Y, які спостерігалися і ті, що відповідають $X = x$.

Приклад. При $x_1 = 2$ величина Y прийняла значення $y_1 = 5$, $y_2 = 7$, $y_3 = 9$, то умовне середнє $\bar{y}_{x_1} = \frac{5+7+9}{3} = 7$.

Умовним середнім $\bar{x}_y$ називають середнє арифметичне значення X, які спостерігалися і ті, що відповідають $Y = y$.

Умовне середнє $\bar{y}_x$ є функцією від x. Цю функцію позначимо $f^*(x)$ і отримаємо: $\bar{y}_x = f^*(x)$.

Це рівняння називають ***вибірковим рівнянням регресії*** Y ***на*** X; функцію $f^*(x)$ називають ***вибірковою регресією*** Y ***на*** X. Аналогічно будемо мати для X на Y: $\bar{x}_y = \varphi^*(y)$.

Розглянемо систему кількісних ознак (X, Y). У результаті отримаємо n пар чисел: (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n).

За цими даними вибіркове рівняння прямої лінії середньоквадратичної регресії будемо шукати у вигляді: $\bar{y}_x = kx + b$.

Кутовий коефіцієнт k прямої лінії регресії Y на X називають ***вибірковим коефіцієнтом регресії*** Y ***на*** X і позначають через ρ_{yx}.

Підберемо ρ_{yx} і b так, щоб сума квадратів відхилень була мінімальною (у цьому суть методу найменших квадратів).

Застосувавши цей метод, знайдені шукані параметри мають вигляд:

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2},$$

$$b = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}. \qquad (*)$$

Приклад. Знайдемо вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними $n = 5$ спостережень:

x	1,0	1,5	3,0	4,5	5,0
y	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

Розв'язання. Побудуємо розрахункову таблицю:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,0	1,25	1,0	1,25
1,5	1,4	2,25	2,1
3,0	1,5	9	4,5
4,5	1,75	20,25	7,875
5,0	2,25	25,00	11,25
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8{,}15$	$\sum x_i^2 = 57{,}5$	$\sum x_i y_i = 26{,}975$

Знайдемо шукані параметри, використовуючи дані таблиці і формули (*):

$$\rho_{yx} = \frac{(5 \cdot 26{,}975 - 15 \cdot 8{,}15)}{\left(5 \cdot 57{,}5 - 15^2\right)} = 0{,}202,$$

$$b = \frac{(57{,}5 \cdot 8{,}15 - 15 \cdot 26{,}975)}{62{,}5} = 1{,}024.$$

Шукане рівняння вибіркової регресії: $Y = 0{,}202x + 1{,}024$.

КОРЕЛЯЦІЙНА ТАБЛИЦЯ

При великому числі спостережень одне і те ж значення x може спостерігатися n_x разів, одне і те ж значення y - n_y разів, одна і та ж пара чисел (x, y) може спостерігатися n_{xy} разів. Тому спостережувані дані групують, тобто підраховують частоти n_x, n_y, n_{xy}. Всі згруповані дані записують у вигляді таблиці, яку називають ***кореляційною***.

Очевидно, $\sum n_x = \sum n_y = n$.

ВИБІРКОВИЙ КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ

Для відшукання параметрів прямої лінії регресії Y на X методом найменших квадратів запишемо систему рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\sum x^2\right)\rho_{yx} + \left(\sum x\right)b = \sum xy \\ \left(\sum x\right)\rho_{yx} + nb = \sum y\end{array}\right\} \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum x = n\overline{x} \Rightarrow \overline{x} = \dfrac{\sum x}{n} \\ \sum y = n\overline{y} \Rightarrow \overline{y} = \dfrac{\sum y}{n} \\ \sum x^2 = n\overline{x}^2 \Rightarrow \overline{x}^2 = \dfrac{\sum x^2}{n} \\ \sum xy = \sum n_{xy}xy\end{array}\right\} \qquad (**)$$

Підставимо $(**)$ у $(*)$ і, скоротивши на n, отримаємо:

$$\left.\begin{array}{l}\left(n\overline{x}^2\right)\rho_{yx} + \left(n\overline{x}\right)b = \sum n_{xy}xy \\ \overline{x}\rho_{yx} + b = \overline{y}\end{array}\right\}.$$

Знайдемо значення b із другого рівняння та підставимо в рівняння $\overline{y}_x = \rho_{yx}x + b$, тоді $\overline{y}_x - \overline{y} = \rho_{xy}\left(x - \overline{x}\right)$. Знайдемо коефіцієнт регресії, враховуючи, що $\overline{x}^2 - \left(\overline{x}\right)^2 = \overline{\sigma}_x^2$:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\left(\overline{x}^2 - \left(\overline{x}\right)^2\right)} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\overline{\sigma}_x^2}.$$

Домножимо обидві частини на $\dfrac{\overline{\sigma}_x}{\overline{\sigma}_y}$:

$$\rho_{yx}\frac{\overline{\sigma}_x}{\overline{\sigma}_y} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\overline{\sigma}_x\overline{\sigma}_y} = r_B.$$

Остаточно отримаємо вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X виду $\overline{y}_x - \overline{y} = r_B\dfrac{\overline{\sigma}_y}{\overline{\sigma}_x}\left(x - \overline{x}\right)$.

$r_B = \dfrac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\overline{y}}{n\overline{\sigma}_x\overline{\sigma}_y}$ називають ***вибірковим коефіцієнтом кореляції***.

Вибірковий коефіцієнт кореляції r_B є оцінкою коефіцієнта кореляції r генеральної сукупності і тому також служить для вимірювання лінійного зв'язку між Y та X.

КРИВОЛІНІЙНА КОРЕЛЯЦІЯ

Якщо графік $\bar{y}_x = f^*(x)$ зображається кривою лінією, то кореляцію називають ***криволінійною***. *Наприклад*, функція регресії Y на X може мати вигляд: $\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$ (параболічна кореляція другого порядку).

Використовуючи метод найменших квадратів, отримують систему лінійних рівнянь відносно невідомих параметрів a, b, c:

$$\begin{cases} \left(\sum n_x x^4\right)a + \left(\sum n_x x^3\right)b + \left(\sum n_x x^2\right)c = \sum n_x \bar{y}_x x^2; \\ \left(\sum n_x x^3\right)a + \left(\sum n_x x^2\right)b + \left(\sum n_x x\right)c = \sum n_x \bar{y}_x x; \\ \left(\sum n_x x^2\right)a + \left(\sum n_x x\right)b + nc = \sum n_x \bar{y}_x. \end{cases}$$

МНОЖИННА КОРЕЛЯЦІЯ

Якщо досліджують зв'язок між декількома ознаками, то кореляцію називають ***множинною***. У простішому випадку число ознак рівне трьом і зв'язок між ними лінійний:

$$z = ax + by + c. \qquad (*)$$

У даному випадку виникають такі **<u>задачі</u>**:

1) за даними спостережень необхідно знайти коефіцієнти a, b, c;

2) оцінити тісноту зв'язку між Z і ознаками X, Y;

3) оцінити тісноту зв'язку між Z і X при сталому Y, між Z і Y (при сталому X).

Перша задача вирішується методом найменших квадратів, причому замість $(*)$ використовують

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}),$$

де $a = \dfrac{r_{xz} - r_{yz} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \dfrac{\sigma_z}{\sigma_x}$, $b = \dfrac{r_{yz} - r_{xz} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \dfrac{\sigma_z}{\sigma_y}$.

Тут r_{xz}, r_{yz}, r_{xy} - коефіцієнти кореляції відповідно між X і Z, Y і Z, X і Y; σ_x, σ_y, σ_z - середні квадратичні відхилення.

Тіснота зв'язку Z із X, Y оцінюється ***вибірковим сукупним коефіцієнтом кореляції***: $R = \sqrt{\dfrac{r_{xz}^2 - 2r_{xy} r_{xz} r_{yz} + r_{yz}^2}{1 - r_{xy}^2}}$, причому $0 \le R \le 1$.

Тіснота зв'язку між Z і X (Y стале), між Z і Y (X стале) оцінюється відповідно ***частковими вибірковими коефіцієнтами кореляції***:

$$r_{(xz)y} = \frac{r_{xz} - r_{xy} r_{yz}}{\sqrt{\left(1 - r_{xy}^2\right)\left(1 - r_{yz}^2\right)}}, \qquad r_{(yz)x} = \frac{r_{yz} - r_{xy} r_{xz}}{\sqrt{\left(1 - r_{xy}^2\right)\left(1 - r_{xz}^2\right)}}.$$

Лекція 13*
СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ

Стаціонарною називають випадкову функцію $X(t)$, математичне сподівання якої залежить тільки від різниці аргументів $t_2 - t_1$.

Звідси слідує, що:

1) кореляційна функція стаціонарної випадкової функції є функцією одного аргументу: $\tau = t_2 - t_1$, тобто $K_x(t_1, t_2) = k_x(t_2 - t_1) = k_x(\tau)$.

2) дисперсія стаціонарної випадкової функції стала при всіх значеннях t і рівна значенню кореляційної функції в початку координат $(\tau = 0)$:

$$D_x(t) = K_x(t, t) = k_x(t - t) = k_x(0).$$

Приклад. Задана випадкова функція $X(t) = \cos(t + \varphi)$, де φ - випадкова величина, яка рівномірно розподілена на інтервалі $(0; 2\pi)$. Довести, що $X(t)$ - стаціонарна випадкова функція.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання:

$$m_x(t) = M[\cos(t+\varphi)] = M[\cos t \cos\varphi - \sin t \sin\varphi] = \cos t M[\cos\varphi] - \sin t M[\sin\varphi].$$

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx,\ f(x) \text{ - рівномірно розподілена, } f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2\pi}.$$

$$M[\cos\varphi] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0,\ M[\sin\varphi] = 0. \text{ Тоді } m_x(t) = 0.$$

Центрована функція $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = X(t) = \cos(\varphi + t)$.

$$K_x(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right] = M[\cos(t_1+\varphi)\cos(t_2+\varphi)] =$$

$$= M\left[\frac{\cos(t_2 - t_1) + \cos(t_2 + t_1 + 2\varphi)}{2}\right] = \frac{\cos(t_2 - t_1)}{2}, \quad \text{бо } M[\cos(t_2 + t_1 + 2\varphi)] = 0.$$

Оскільки математичне сподівання випадкової функції $X(t)$ постійне при всіх значеннях t і кореляційна функція залежить тільки від різниці $t_2 - t_1$, то звідси слідує, що $X(t)$ - стаціонарна випадкова функція.

Знайдемо $D_x(t) = K_x(t,t) = \dfrac{\cos(t-t)}{2} = \dfrac{1}{2} = const$ при всіх t. Так і повинно бути для стаціонарної випадкової функції.

Властивості кореляційної функції стаціонарної випадкової функції:

1) кореляційна функція стаціонарної випадкової функції є *парною*: $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$. Це випливає із властивості $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1)$;

2) $|k_x(\tau)| \le k_x(0)$. Це випливає із властивості $|K_x(t_1, t_2)| \le \sqrt{D_x(t_1) D_x(t_2)}$.

Нормованою кореляційною функцією стаціонарної випадкової функції називають невипадкову функцію аргументу τ: $\rho_x(\tau) = \dfrac{k_x(\tau)}{k_x(0)}$.

Приклад. Задана кореляційна функція $k_x(\tau)=\frac{1}{2}\cos\tau$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти нормовану кореляційну функцію.

Розв'язання. Скористаємось означенням нормованої кореляційної функції: $\rho_x(\tau)=\frac{k_x(\tau)}{k_x(0)}=\frac{\frac{1}{2}\cos\tau}{\frac{1}{2}\cos 0}=\cos\tau$. Отже, $\rho_x(\tau)=\cos\tau$.

СТАЦІОНАРНО ЗВ'ЯЗАНІ ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ

Стаціонарно зв'язаними називають дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$, якщо їх взаємна кореляційна функція залежить тільки від різниці аргументів $\tau=t_2-t_1$: $R_{xy}(t_1,t_2)=r_{xy}(\tau)$.

Властивості: $r_{xy}(\tau)=r_{yx}(-\tau)$. Графік кривої $r_{yx}(-\tau)$ симетричний графіку кривої $r_{xy}(\tau)$ відносно осі ординат.

Приклад. Задано дві стаціонарні функції $X(t)=\cos(t+\varphi)$ і $Y(t)=\sin(t+\varphi)$, де φ - випадкова величина, розподілена рівномірно на інтервалі $(0;2\pi)$. Довести, що задані стаціонарні функції є стаціонарно зв'язаними.

Розв'язання. З попередньої задачі $m_x(t)=0$. Аналогічно можна отримати, що $m_y(t)=0$. Запишемо центровані функції: $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t)=X(t)=\cos(t+\varphi)$.

Знайдемо взаємну кореляційну функцію:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right]=M\left[\cos(t_1+\varphi)\sin(t_2+\varphi)\right]=$$

$$=M\left[\frac{\sin(t_2-t_1)+\sin(t_1+t_2+2\varphi)}{2}\right]=\frac{\sin(t_2-t_1)}{2}+M\left[\frac{\sin(t_1+t_2+2\varphi)}{2}\right].$$

Аналогічно порахувавши математичне сподівання, як у попередній задачі, отримаємо: $M\left[\frac{\sin(t_1+t_2+2\varphi)}{2}\right]=0$. Отже, $R_{xy}(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\sin(t_2-t_1)$ - залежить тільки від різниці t_2-t_1, тому ці функції є *стаціонарно зв'язаними*.

Визначення характеристик ергодичних стаціонарних випадкових функцій із експерименту

Серед стаціонарних випадкових функцій можна виділити клас функцій, оцінка характеристик яких шляхом усереднення множини реалізацій рівносильна усередненню по часу тільки однієї реалізації досить великої протяжності.

Стаціонарну випадкову функцію $X(t)$ називають ***ергодичною***, якщо її характеристики, знайдені усередненням великої кількості реалізацій, співпадають із відповідними характеристиками, отриманими усередненням по часу одної реалізації $X(t)$, яка спостерігається на інтервалі $(0;\tau)$ достатньо великої протяжності.

Достатня умова ергодичності стаціонарної випадкової функції $X(t)$ відносно математичного сподівання полягає в тому, що $\lim\limits_{\tau\to\infty} k_x(\tau)=0$.

Достатня умова ергодичності стаціонарної випадкової функції $X(t)$ відносно кореляційної функції полягає в тому, що $\lim\limits_{\tau\to\infty} k_y(\tau)=0$, де $Y(t,\tau)=\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t+\tau)$.

Математичне сподівання ергодичної стаціонарної випадкової функції $X(t)$, що спостерігається на інтервалі $(0;T)$ від реалізації $X(t)$ має значення: $m_x^*=\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)dt$.

В якості оцінки кореляційної функції ергодичної стаціонарної випадкової функції приймають, що $k_x^*(\tau)=\dfrac{1}{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)dt-\left[m_x^*\right]^2$.

Практично інтеграли обчислюють наближено: $m_x^*=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x(t_i)}{n}$, $k_x^*(l\dfrac{T}{n})=\dfrac{1}{n-l}\sum\limits_{i=1}^{n-1} x(t_i)x(t_{i+1})-\left[m_x^*\right]^2$, де $l=1,2,...,n-1$.

Лекція 14*
ЕЛЕМЕНТИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

У цій лекції вводиться нова характеристика стаціонарної випадкової функції – *спектральна густина*. Використовуючи її, можна знайти характеристики вихідної функції стаціонарної лінійної динамічної системи за відомими характеристиками вхідної функції.

1) Стаціонарну функцію можна представити у вигляді гармонічних коливань із випадковими амплітудами і випадковими фазами:

$$Z(t)=U\cos\omega t+V\sin\omega t,$$

де ω - натуральне дійсне число, U, V - некорельовані випадкові величини з математичними сподіваннями рівними нулю і однаковими дисперсіями: $m_v=m_u=0$, $D_v=D_u=D$. Зробимо деякі перетворення: $Z(t)=V\left(\dfrac{U}{V}\cos\omega t+\sin\omega t\right)$. Підставимо $\dfrac{U}{V}=tg\varphi$, отримаємо:

$$Z(t)=V\left(tg\varphi\cos\omega t+\sin\omega t\right)=\frac{V}{\cos\varphi}\left(\sin\varphi\cos\omega t+\sin\omega t\cos\varphi\right)=\frac{V}{\cos\varphi}\sin(\omega t+\varphi).$$

$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + tg^2\varphi$ або $\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + tg^2\varphi} = \sqrt{1 + \left(\frac{U}{V}\right)^2}$. Тоді $Z(t) = \sqrt{U^2 + V^2}\sin(\omega t + \varphi)$.

Випадкову функцію $Z(t)$ можна потрактувати як гармонічні коливання з *випадковою амплітудою* $\sqrt{U^2 + V^2}$, *випадковою фазою* $\omega t + arctg\left(\frac{U}{V}\right)$ і *частотою* ω. Оскільки $m_v = m_u = 0$, то і $m_Z(t) = 0$. Тоді центрована випадкова функція $\overset{\circ}{Z}(t) = Z(t) - m_Z(t) = Z(t)$. Покажемо, що $Z(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t$ - стаціонарна випадкова функція.

Знайдемо

$K_Z(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{Z}(t_1)\overset{\circ}{Z}(t_2)\right] = M[Z(t_1)Z(t_2)] = M[(U\cos\omega t_1 + V\sin\omega t_1)\times$

$\times(U\cos\omega t_2 + V\sin\omega t_2)]$. Треба врахувати, що $M(U^2) = M(V^2) = D$. Оскільки U і V – некорельовані, то їх кореляційний момент $K_{uv} = M(UV) - M(U)M(V) = M[UV] = 0$.

$K_Z(t_1, t_2) = M[U^2\cos\omega t_1\cos\omega t_2 + UV\cos\omega t_1\sin\omega t_2 + UV\sin\omega t_1\cos\omega t_2 +$

$+V^2\sin\omega t_1\sin\omega t_2)] = \cos\omega t_1\cos\omega t_2 M[U^2] + (\cos\omega t_1\sin\omega t_2 + \sin\omega t_1\cos\omega t_2)M[UV] +$

$+\sin\omega t_1\sin\omega t_2 M[V^2] = D[\cos\omega t_1\cos\omega t_2 + \sin\omega t_1\sin\omega t_2] = D\cos\omega(t_2 - t_1)$.

2) Нехай випадкова функція $X(t)$ є сумою скінченого числа доданків виду:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n}[U_i\cos\omega_i t + V_i\sin\omega_i t] \qquad (*),$$

де U_i і V_i - некорельовані, $M(U_i) = M(V_i) = 0$, $D(U_i) = D(V_i) = D$, $m_x(t) = m[X(t)] = 0$, оскільки математичне сподівання кожного з доданків рівне нулю. $X(t)$ - центрована функція, $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = X(t)$. Кореляційна функція $K_x(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} D_i\cos\omega_i(t_2 - t_1)$, тобто $X(t)$ - стаціонарна випадкова функція і $k_x(\tau) = \sum_{i=1}^{n} D_i\cos\omega_i\tau$. Беручи до уваги те, що $X_i(t) = \sqrt{U_i^2 + V_i^2}\sin(\omega_i t + \varphi_i)$, де $\varphi_i = arctg\left(\frac{U_i}{V_i}\right)$, тоді суму (*) можна представити у вигляді: $X(t) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{U_i^2 + V_i^2}\sin(\omega_i t + \varphi_i)$, тобто $X(t)$ представлена у вигляді суми гармонік різних частот із випадковими амплітудами і випадковими фазами.

Спектральним розкладом стаціонарної випадкової функції називають представлення цієї функції у вигляді суми гармонічних коливань різних частот із випадковими амплітудами і випадковими фазами.

Дискретний спектр стаціонарної випадкової функції

Нехай стаціонарна випадкова функція $X(t)$ представлена у вигляді:

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n}X_i(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[U_i\cos\omega_i t+V_i\sin\omega_i t\right]. \quad (**)$$

Знайдемо дисперсію однієї гармоніки $V_i(t)$.

$D[X_i(t)]=D[U_i\cos\omega_i t+V_i\sin\omega_i t]=D[U_i\cos\omega_i t]+D[V_i\sin\omega_i t]=\cos^2\omega_i tD[U_i]+$ $+\sin^2\omega_i tD[V_i]=D_i(\cos^2\omega_i t+\sin^2\omega_i t)=D_i$. Тоді $D[X(t)]=D\left[\sum_{i=1}^{n}X_i(t)\right]=$ $=\sum_{i=1}^{n}D[X_i(t)]=\sum_{i=1}^{n}D_i$.

Дискретним спектром стаціонарної випадкової функції $X(t)$ виду (**) називають сукупність дисперсій всіх складових її гармонік. Оскільки кожній частоті ω_i відповідає певне значення D_i, то спектр можна зобразити *графічно*: по осі Ox відкладають частоти ω_i, а по осі Oy - дисперсії D_i. Їх сукупність називають ***спектральними лініями***, а сам дискретний спектр – ***лінійчастим***.

Неперервний спектр стаціонарної випадкової функції

Нехай різниця будь-яких сусідніх частот $\Delta\omega=\omega_{i+1}-\omega_i=\dfrac{\pi}{T}$, $(i=1,2,...,n)$, де T - дійсне додатне число. Таким чином, $\omega_1=\dfrac{\pi}{T}$, $\omega_2=\dfrac{2\pi}{T}$, ..., $\omega_n=\dfrac{n\pi}{T}$. Нехай $T\to\infty$, тоді $\Delta\omega\to 0$. Зрозуміло, що частота при цьому змінюється *неперервно* і в границі ми отримуємо *неперервний спектр*, тобто кожній частоті $\omega\ (\omega\geq 0)$ відповідає ордината, яку позначають $s_x(\omega)$. Величину $s_x(\omega)$ називають ***спектральною густиною стаціонарної функції***.

Спектральна густина – парна функція: $s_x(-\omega)=s_x(\omega)$. Оскільки $s_x(\omega)$ парна, то дисперсія $D_x=2\int_0^{\infty}s_x(\omega)d\omega$.

ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЯ

Дельта-функція $\delta(t)$ - це така функція, яка ставить у відповідність будь-якій неперервній функції $f(t)$ її значення при $t=0$: $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$.

Дельта-функцію умовно записують, виходячи з означення:

$$\delta(t)=\begin{cases}0, \textit{при}\ t\neq 0\\ \infty, \textit{при}\ t=0\end{cases}.$$

Фізично δ - функція трактується як густина одиничної маси, зосереджена в нулі.

Примітка. Часто використовують ще таке співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0).$$

Стаціонарний білий шум

Стаціонарним білим шумом називають стаціонарну випадкову функцію $X(t)$, спектральна густина якої постійна:

$$s_x(\omega)=s=const\ .$$

Кореляційна функція білого шуму $k_x(\tau)=2\pi s\delta(\tau)$. Коефіцієнт $2\pi s$ називають ***інтенсивністю білого шуму***.

Таким чином, *стаціонарний білий шум* – математична абстракція, корисна в теорії випадкових функцій. Зокрема, білий шум використовують для моделювання випадкових процесів, які мають сталу спектральну частоту в деякому інтервалі.

Лекція 15*
МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Назва цього методу пов'язана із назвою міста Монте-Карло, де в казино грають у рулетку – одного з найпростіших пристроїв отримання випадкових чисел.

Суть цього методу: необхідно знайти значення a деякої величини, що вивчається. Для цього беруть таку випадкову величину X, для якої математичне сподівання $M(X)=a$.

Практично роблять це так: здійснюють n випробувань, у результаті яких отримують n можливих значень X, обчислюють їх середнє арифметичне $\bar{x}=\dfrac{\sum x_i}{n}$ і приймають $\bar{x}$ у якості оцінки a^* деякого числа a: $a\approx a^*=\bar{x}$.

Відшукування можливих значень випадкової величини X (моделювання) називають ***розігруванням випадкової величини***. Розглянемо деякі *способи* розігрування випадкової величини, а також як оцінити допустиму при цьому помилку (похибку).

Оцінка похибки методу Монте-Карло

Нехай здійснено n випробувань і отримано n можливих значень X. Знайдене $\overline{X}=a^*$. Якщо повторити дослід, то буде отримане інше значення a^*. При цьому виникає питання про величину допустимої похибки. Верхня границя δ допустимої похибки із заданою ймовірністю (надійністю) γ:

$$P\left(\left|\overline{X}-a\right|\le\delta\right)=\gamma.$$

Верхня границя похибки δ - це і є точність оцінки математичного сподівання по вибірковій середній за допомогою довірчих інтервалів.

Розглянемо ***три випадки***:

1) Випадкова величина X розподілена нормально і її середнє квадратичне відхилення σ. Тоді надійність γ - верхня межа похибки:

$$\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (*),$$

де n - число випробувань, t - значення аргументу функції Лапласа $\left(\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}\right)$, σ - відоме середнє квадратичне відхилення X.

2) Випадкова величина X розподілена нормально, причому σ її невідоме. Тоді

$$\delta=\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} \qquad (**),$$

де n - число випробувань, s - виправлене середнє квадратичне відхилення, $s=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n-1}}$, t_γ - знаходимо за таблицями.

Приклад. Знайти верхню границю похибки δ із надійністю $\gamma=0{,}95$, якщо для оцінки математичного сподівання нормальної величини X було розіграно 100 її можливих значень і за ними знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $s=0{,}5$.

Розв'язання. За умовою, $n=100$, $s=0{,}5$. За таблицями при відомих $\gamma=0{,}95$ і $n=100$ знаходимо $t_\gamma=1{,}984$. Шукана верхня границя похибки $\delta=\frac{1{,}984\cdot 0{,}5}{\sqrt{100}}=0{,}099$.

3) Випадкова величина X розподілена за законом, відмінним від нормального.

У цьому випадку при досить великому числі випробувань $(n>30)$ із надійністю γ, верхня границя обчислюється за формулою $(*)$, якщо відоме σ. Якщо σ невідоме, тоді у формулу $(*)$ підкладаємо s - виправлене середнє квадратичне відхилення або використовуємо формулу $(**)$.

Випадкові числа

Випадковими числами називають можливі значення r неперервної випадкової величини R, розподіленої рівномірно в інтервалі $(0;1)$. Насправді користуються нерівномірно розподіленою величиною R^*, яку називають ***квазірівномірною***. В результаті заміни R на R^* розігрувана величина має не точний, а приблизно заданий розподіл.

Розігрування дискретної випадкової величини

Нехай R - неперервна випадкова величина, розподілена рівномірно на інтервалі $(0;1)$ і r_j $(j=1, 2, ...)$ - випадкові числа (можливі значення R).

Правило. Щоб розіграти дискретну випадкову величину X, задану законом розподілу:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

потрібно:

1) розбити інтервал $(0;1)$ осі Or на n часткових інтервалів: Δ_1 - $(0;\, p_1)$, Δ_2 - $(p_1;\, p_1+p_2)$, ..., Δ_n - $(p_1+p_2+...+p_{n-1};1)$.

2) вибрати (наприклад, із таблиці випадкових чисел або згенерувати на комп'ютері) випадкове число r_j. Якщо r_j попало в інтервал Δ_i, то розігрувана величина прийняла значення x_i.

Приклад. Розігрується 6 можливих значень дискретної випадкової величини X, закон розподілу якої заданий таблицею:

X	2	10	18
p	0,22	0,17	0,61

Розв'язання. Розіб'ємо інтервал $(0;1)$ осі Or точками з координатами 0,22; 0,22+0,17=0,39 на три часткові інтервали:

Δ_1 - $(0;\,0{,}22)$, Δ_2 - $(0{,}22;0{,}39)$, Δ_3 - $(0{,}39;1)$.

Виберемо 6 випадкових чисел, наприклад, 0,32; 0,17; 0,90; 0,05; 0,97; 0,87.

Випадкове число $r_1=0{,}32$ належить інтервалу Δ_2, тому розігрувана величина прийняла значення $x_2=10$, $r_2=0{,}17$ належить Δ_1, тому розігрувана величина прийняла можливе значення $x_1=2$ і т.д.

Отже, розіграні можливі значення такі: 10; 2; 18; 2; 18; 18.

Розігрування неперервної випадкової величини

Нехай $F(x)$ - функція розподілу неперервної випадкової величини. Необхідно розіграти X, тобто знайти можливі значення x_i $(i=1, 2, ...)$.

1) ***Метод обернених функцій***.

Правило 1. Для того, щоб розіграти можливі значення x_i неперервної випадкової величини X, необхідно вибрати випадкове число r_i, прирівняти до функції розподілу і розв'язати відносно x_i отримане рівняння $F(x_i)=r_i$.

Правило 2. Нехай відома щільність $f(x)$. Для того, щоб розіграти можливі значення x_i неперервної випадкової величини X, знаючи $f(x)$, необхідно вибрати випадкове число r_i і розв'язати відносно x_i рівняння:

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i \text{ або } \int_{a}^{x_i} f(x)dx = r_i,$$

де a - найменше кінцеве можливе значення X.

Приклад 1. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, заданим функцією розподілу $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ $(x>0)$. Знайти дійсну формулу для розігрування можливих значень X.

Розв'язання. За правилом 1: $1-e^{-\lambda x_i}=r_i$. Знайдемо звідси x_i:

$$e^{-\lambda x_i}=1-r_i \text{ або } -\lambda x_i=\ln(1-r_i)$$

$$x_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-r_i).$$

Величини R і $1-R$ розподілені однаково. Тому замість $1-r_i$ можна написати r_i, тоді $x_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(r_i)$.

Приклад 2. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X: $f(x)=\lambda\left(1-\frac{\lambda x}{2}\right)$ в інтервалі $\left(0;\frac{2}{\lambda}\right)$. За цим інтервалом $f(x)=0$. Знайти формулу для розігрування всеможливих значень X.

Розв'язання. За правилом 2: $\int\limits_0^{x_i}\lambda\left(1-\frac{\lambda x}{2}\right)dx=r_i$. Виконавши інтегрування і вирішивши одержане квадратне рівняння відносно x_i, будемо мати: $x_i=\frac{2\left(1-\sqrt{1-r_i}\right)}{\lambda}$.

Лекція 16*
ЛАНЦЮГИ МАРКОВА

Ланцюгом Маркова називають послідовність випробувань, у кожному із яких з'являється тільки одна із k несумісних подій $A_1, A_2, ..., A_k$ повної групи, причому умовна ймовірність $p_{ij}(s)$ того, що в s-му випробуванні відбудеться подія A_j $(j=1,2,...,k)$, при умові, що в $(s-1)$-му відбулася подія A_i $(i=1,2,...,k)$, не залежить від результатів попередніх випробувань.

Приклад. Якщо послідовність випробувань утворює ланцюг Маркова, і повна група складається з чотирьох несумісних подій A_1, A_2, A_3, A_4, причому відомо, що в 6 випробуванні з'явилася подія A_2, то умовна ймовірність того, що в 7 випробуванні з'явиться подія A_4, не залежить від того, які події появлялися з першого по п'яте випробування.

Звідси слідує, що поняття ланцюга Маркова є узагальненим поняттям незалежних випробувань.

Ланцюгом Маркова з дискретним часом називають ланцюг, зміни стану якого відбуваються в певні фіксовані моменти часу.

Ланцюгом Маркова з неперервним часом називають ланцюг, зміни стану якого відбуваються в будь-які випадкові можливі моменти часу.

Однорідний ланцюг Маркова

Однорідним ланцюгом Маркова називають ланцюг, в якому умовна ймовірність $p_{ij}(s)$ (перехід із стану i в стан j) не залежить від номеру випробування. Тому замість $p_{ij}(s)$ пишуть p_{ij}.

Приклад. **Випадкове блукання**. Нехай на осі Ox у точці з цілочисловою координатою $x=n$ знаходиться матеріальна точка. У певні моменти часу t_1, t_2, ... частинка зазнає поштовхів. Під дією поштовху частинка з ймовірністю p зміщується на одиницю вправо і з ймовірністю $1-p$ - вліво. Зрозуміло, що координата точки залежить від того, де знаходилася частинка безпосередньо перед тим і не залежить від попередніх поштовхів.

Отже, випадкове блукання – приклад однорідного ланцюга Маркова з дискретним часом.

Нехай число станів рівне k.

Матрицею переходу системи називають матрицю, яка містить всі перехідні ймовірності цієї системи:

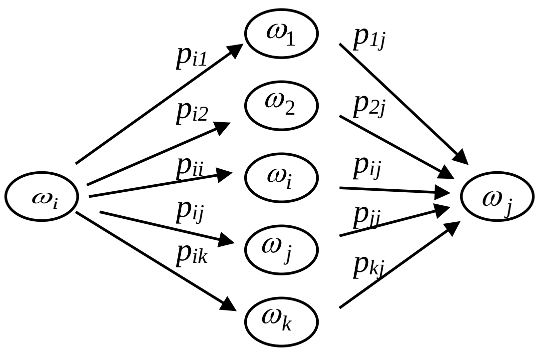
$$\pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}.$$

Тут p_{11} - ймовірність переходу із першого стану у перший, p_{23} - ймовірність переходу із другого стану у третій і т.д.

Для кожного рядка матриці виконується рівність:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1}, \ (i = 1, 2, ..., k).$$

Матрицю π ще називають матрицею ймовірності ***однокрокового переходу системи***. Якщо позначимо множину всіх можливих станів через $\Omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ..., \omega_j, ..., \omega_k)$, то ймовірність переходу системи зі стану ω_i в стан ω_j за два кроки схематично зображають так:



Ймовірність того, що система за два кроки перейде із стану ω_i у стан ω_j, дорівнює:

$$P_{ij}^{(2)} = p_{i1}p_{1j} + p_{i2}p_{2j} + ... + p_{ik}p_{kj} = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}p_{rj} \text{ для } (i = 1, 2, ..., k; \ j = 1, 2, ..., k) \qquad (*).$$

Вираз $(*)$ є елементом матриці $\pi^{(k)}$, який отриманий при множенні i-го рядка матриці π на її j-ий стовпчик.

Ймовірність переходу системи із стану ω_i у стан ω_j за n кроків обчислюють за формулою:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}\, p_{rj}{}^{(n-1)},$$

де $P_{ij}^{(n)}$ - елемент матриці $\pi^{(n)}$.

Матрицю $\pi^{(n)}$ називають n - ***кроковою*** матрицею переходу із одного стану в інший.

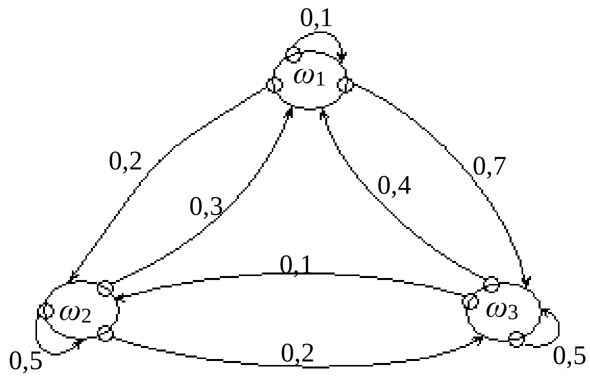
Імовірнісну картину переходу системи з одного стану в інший зображають за допомогою ***орієнтованих імовірнісних графів***.

Приклад. За заданою матрицею імовірнісного переходу деякої системи

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

побудувати орієнтований імовірнісний граф.

Розв'язання. За умовою система має три стани: ω_1, ω_2, ω_3. Отже, граф матиме три вершини. Ймовірність переходу системи з одного стану в інший наведені в кожному рядку матриці π. Зобразимо імовірнісний граф:



Рівність Маркова

Будемо вважати, що з початкового стану і за m кроків система перейде в проміжний стан з ймовірністю $p_{ir}^{(m)}$, після чого за $n-m$ кроків із проміжного стану вона перейде в кінцевий j-ий стан з ймовірністю $p_{rj}^{(n-m)}$.

За формулою повної ймовірності:

$$\boxed{P_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{i} p_{ir}^{(m)} p_{rj}^{(n-m)}}.$$

Цю формулу називають ***рівністю Маркова***.

Оскільки рівність Маркова складна, то з цією метою використовують матричне числення, і в матричній формі:

$$\pi^{(2)} = \pi \cdot \pi = \pi^2,$$

$$\pi^{(3)} = \pi \cdot \pi^{(2)} = \pi \cdot \pi^2 = \pi^3.$$

В загальному випадку $\pi^{(n)} = \pi^n$.

Приклад. Задана матриця переходу: $\pi = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю $\pi^{(2)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Використаємо формулу $\pi^{(2)} = \pi \cdot \pi$:

$$\pi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix}.$$

Стаціонарні ймовірності

Із збільшенням числа кроків

$$\lim_{n \to \infty} \pi^{(n)} = B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_k \end{pmatrix}.$$

Ймовірності b_j $\left(j = 1, 2, \dots, k\right)$ називають ***стаціонарними***.

Розглянемо $\lim\limits_{n \to \infty} \pi^{(n)} = \lim\limits_{n \to \infty} \pi \cdot \pi^{(n-1)} = \pi \lim\limits_{n \to \infty} \pi^{(n-1)} = \pi B$.

Отже, для знаходження стаціонарних ймовірностей необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} B = \pi B \\ \sum\limits_{j=1}^{k} b_j = 1 \end{cases}$$

Марківські випадкові процеси

Випадковий процес $X(t)$ називають ***марківським***, якщо за будь-якого можливого значення часу $t = t_1$ значення випадкової величини $x(t_1)$ не залежить від того, яких значень ця величина набула для $t < t_1$, тобто процес у момент часу $t = t_1$ не залежить від його поведінки в більш ранні моменти часу $t < t_1$.

Марківський процес $X(t)$ називають ***однорідним***, якщо закономірності його поведінки на будь-якому проміжку часу ΔT не залежать від розміщення цього інтервалу на головній осі.

Якщо аргумент t набуває лише значень 0, 1, 2, ..., то в цьому разі матимемо послідовність переходів $x(0) \to x(1) \to x(2) \to \dots$. Такий процес послідовностей переходів є не чим іншим, як ***ланцюгом Маркова***.

Лекція 17*
ІНТЕРПОЛЮВАННЯ І ЕКСТРАПОЛЮВАННЯ

При використанні числових таблиць, які виражають залежність однієї величини (функції) від іншої (аргументу), часто приходиться шукати значення функції, що відповідає проміжним значенням аргументу, - проводити ***інтерполювання*** (***інтерполяцію***).

Її можна проводити графічним шляхом або обчислювати за спеціальними інтерполяційними формулами (наприклад, інтерполяційними формулами Стирлінга).

Екстраполювання (***екстраполяція***) – знаходження значення функції для аргументу, що знаходиться за межами таблиці даних (даних експерименту). У всіх випадках екстраполяція дає лише наближені значення. Краще всього екстраполяцію проводити за графіком і керуючись характером зміни, знімати потрібні значення прямо з графіка.

ПОХИБКИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

При вимірюванні будь-яких величин неминучі ***похибки вимірювань***. Іноді при проведенні експерименту виникають грубі помилки – ***промахи***. Промахи приводять переважно до значних похибок, і тому можливість їх виникнення повинна бути повністю виключена.

По характеру прояву похибок їх поділяють на *систематичні* і *випадкові*.

Систематичні похибки – це складова похибки вимірювання, яка залишається постійною або закономірно змінюється при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини. *Наприклад*, результати вимірювання часу будуть завищені, якщо годинник спішить.

Випадкова похибка – це складова похибки вимірювання, яка змінюється випадковим чином при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини.

Випадкові похибки вимірювань являються випадковими величинами і підчиняються визначеним статистичним закономірностям.

Абсолютною похибкою (помилкою) вимірювання називають різницю між виміряним $x_{вим}$ і істинним (дійсним) x_r значеннями фізичної величини:

$$\Delta = \left| x_{вим} - x_r \right|.$$

Типова форма представлення результату вимірювання:

$$x_r = x_{вим} \pm \Delta$$

означає, що істинне значення з достатньо високою ймовірністю знаходиться в інтервалі

$$x_{вим} - \Delta < x_r < x_{вим} + \Delta .$$

Цей інтервал називається ***довірчим***.

Відносна похибка вимірювання – це відношення абсолютної похибки до вимірюваної величини: $\varepsilon = \dfrac{\Delta}{x_{вим}}$.

Відносну похибку можна виразити також у відсотках.

Припустимо, що для деякої фізичної величини X отримано n незалежних результатів вимірювань: $x_1, x_2, ..., x_n$. Тоді за найточніше значення вимірюваної величини слід взяти їх середнє, яке позначається $\overline{x}$ або $\langle x \rangle$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Чим більше n, тим ближче середнє до невідомого істинного значення X, тобто $\bar{x} \to X$ при $n \to \infty$. Це справедливо тільки в ідеальному випадку, коли систематичні похибки повністю виключені.

Основною характеристикою випадкової похибки являється середнє квадратичне відхилення. Необхідно чітко розрізняти середнє квадратичне відхилення σ для одиничного (окремого) виміру і середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\bar{x}}$ для середнього значення $\bar{x}_i$.

Середнє квадратичне відхилення одиничного виміру обчислюється за наслідками n вимірювань $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$$, де $\bar{x}$ – середнє при n вимірах.

Значення σ є основною характеристикою для точності даного способу вимірювання.

Випадкову похибку можна зменшити, якщо провести не одне, а декілька вимірювань і за результат вимірювання взяти середнє значення $\bar{x}_i$.

Теорія дає наступний зв'язок між середнім квадратичним відхиленням $\sigma_{\bar{x}}$ середнього значення, середнім квадратичним відхиленням одиничного виміру σ і числом вимірювань n, використаних для обчислення середнього $\bar{x}$:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

Похибки непрямих вимірювань

Раніше розглядалися похибки прямих вимірювань, коли якась величина вимірювалася безпосередньо. Величина z, яка часто цікавить нас, безпосередньо не вимірюється і замість неї ми проводимо вимірювання деяких інших величин x, y і т.д., а потім обчислюємо z, яка є відомою функцією вказаних первинних величин $z = f(x, y, ...)$. Такий спосіб вимірювання z називається ***непрямим***.

Приведемо загальний вираз для обчислення похибки непрямого вимірювання. Нехай $z = f(x, y, ...)$ – функція декількох незалежних змінних $x, y, ...$. Тоді

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \ldots} .$$

де $\frac{\partial f}{\partial x}$ — похідна по змінній x, узята в точці $x = x_{вим}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$ — похідна по змінній y, взята в точці $y = y_{вим}$; (і так по всіх змінних); $\Delta z, \Delta x, \Delta y, ...$ – середні квадратичні відхилення; $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)$ — складова похибки вимірювання z, обумовлена похибкою вимірювання x. Аналогічний зміст мають і інші доданки у цій формулі.

Формули обчислення похибок непрямих вимірювань, отримані для деяких окремих випадків, приведені в таблиці:

Функція	*Співвідношення між похибками*
$z = x \pm y$	$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
$z = x \cdot y$, $z = \frac{x}{y}$	$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$z = \ln x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{x}$
$z = e^x$	$\frac{\Delta z}{z} = \Delta x$

Правила округлення результатів і похибок вимірювання

Похибки вимірювань визначаються із деякою помилкою. Ця "помилковість" звичайно така, що в остаточному результаті похибку представляють всього з однією-двома значущими цифрами.

Правила округлення чисел (результатів вимірювань) проілюстровані в таблиці на прикладі округлення до двох значущих цифр:

До округлення	*Після округлення*	*Пояснення*
734,7	730	4<5
736	740	6>5
735,0	740	3 - непарне
745,0	740	4 - парне
745,1	750	Після 5 стоїть не нуль

Результат вимірювання прийнято округлювати так, щоб числове значення результату закінчувалося цифрою того ж розряду, що і значення похибки.

Частина 1
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ З КУРСУ "ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ"

▲ *Алгебра подій. Простір елементарних подій. Операції над подіями. Елементи комбінаторики*

1. Що називається вірогідною подією?
А) подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися;
Б) подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування;
В) подія, яка не може відбутися під час певного випробування;
Г) інша відповідь.

2. Що називається неможливою подією?
А) подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися;
Б) подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування;
В) подія, яка не відбудеться під час певного випробування;
Г) інша відповідь.

3. Навести приклад вірогідної події.
А) при нормальних умовах вода кипить при температурі 100^0C;
Б) в урні є білі і чорні кульки. Витягують зелену кульку;
В) монету підкидають один раз. Поява герба або цифри;
Г) інша відповідь.

4. Навести приклад неможливої події.
А) при нормальних умовах вода кипить при температурі 100^0C;
Б) в урні є білі і чорні кульки. Витягують зелену кульку;
В) монету підкидають один раз. Поява герба або цифри;
Г) інша відповідь.

5. Навести приклад випадкової події.
А) при нормальних умовах вода кипить при температурі 100^0C;
Б) в урні є білі і чорні кульки. Витягують зелену кульку;
В) монету підкидають один раз. Поява герба або цифри;
Г) інша відповідь.

6. Яка подія називається випадковою?
А) подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися;
Б) подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування;
В) подія, яка не відбудеться під час певного випробування;
Г) інша відповідь.

7. Яка подія називається елементарною?
А) подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися;

Б) подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування;
В) подія, яка не відбудеться під час певного випробування;
Г) інша відповідь.

8. Навести приклад елементарної події.
А) монету підкидають один раз. Поява герба;
Б) в урні є білі і чорні кульки. Навмання витягують білу кульку;
В) монету підкидають один раз. Поява цифри;
Г) всі перераховані.

9. Що називається простором елементарних подій?
А) подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися;
Б) подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування;
В) подія, яка не може відбутися під час певного випробування;
Г) множина Ω всіх елементарних подій.

10. Перестановкою із n елементів називаються…
А) такі впорядковані множини з n елементів, які відрізняються між собою порядком їх розміщення;
Б) такі впорядковані підмножини з k елементів, які відрізняються одна від одної як складом елементів, так і порядком їх розміщення;
В) такі невпорядковані підмножини з k елементів, які відрізняються між собою хоча б одним елементом;
Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

11. Розміщенням із n елементів по k називається…
А) такі впорядковані множини з n елементів, які відрізняються між собою порядком їх розміщення;
Б) такі впорядковані підмножини з k елементів, які відрізняються одна від одної як складом елементів, так і порядком їх розміщення;
В) такі невпорядковані підмножини з k елементів, які відрізняються між собою хоча б одним елементом;
Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

12. Комбінацією із n елементів по k називається…
А) такі впорядковані множини з n елементів, які відрізняються між собою порядком їх розміщення;
Б) такі впорядковані підмножини з k елементів, які відрізняються одна від одної як складом елементів, так і порядком їх розміщення;
В) такі невпорядковані підмножини з k елементів, які відрізняються між собою хоча б одним елементом;
Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

13. Яка подія називається протилежною до події A?

А) подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися;
Б) подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування;
В) подія, яка не відбудеться під час певного випробування;
Г) інша відповідь.

14. Навести приклад протилежної події.
А) монету підкидають один раз. Подія A - поява герба;
Б) подія A – спортсмен виконає норму майстра спорту, тоді $\overline{A}$ - спортсмен не виконає норми;
В) монету підкидають один раз. Подія A - поява цифри;
Г) всі перераховані.

15. Як позначаються випадкові події?
А) $A, B, C, ...$;
Б) $A_1, A_2, A_3, ..., A_n; B_1, B_2, B_3, ..., B_n; \ldots$;
В) правильні відповіді А) та Б);
Г) інша відповідь.

16. Що вивчає теорія ймовірності?
А) будову атома;
Б) закономірності руху планет;
В) закономірності випадання опадів на певній території;
Г) закономірності масових подій.

17. Сумою двох випадкових подій A і B називається ...
А) подія $C = A + B$ або $C = A \cup B$;
Б) подія $C = A \cdot B$ або $C = A \cap B$;
В) подія $C = A - B$ або $C = A \setminus B$;
Г) подія $C = A / B$.

18. Добутком двох випадкових подій A і B називається ...
А) подія $C = A + B$ або $C = A \cup B$;
Б) подія $C = A \cdot B$ або $C = A \cap B$;
В) подія $C = A - B$ або $C = A \setminus B$;
Г) подія $C = A / B$.

19. Різницею двох випадкових подій A і B називається ...
А) подія $C = A + B$ або $C = A \cup B$;
Б) подія $C = A \cdot B$ або $C = A \cap B$;
В) подія $C = A - B$ або $C = A \setminus B$;
Г) подія $C = A / B$.

▲ *Різні означення ймовірності.*
Теореми додавання і множення ймовірностей

20. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність, що появиться 1?

А) $\frac{1}{3}$;

Б) $\frac{1}{5}$;

В) $\frac{1}{6}$;

Г) інша відповідь.

21. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність, що появиться 5?

А) $\frac{1}{6}$;

Б) $\frac{1}{5}$;

В) $\frac{5}{6}$;

Г) інша відповідь.

22. Виберіть формулу для визначення класичної ймовірності.

А) $P(A)=\frac{m}{n}$;

Б) $W(A)=\frac{m}{n}$;

В) $P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$;

Г) інша відповідь.

23. Що називається відносною частотою випадкової події?

А) це відношення кількості експериментів m, при яких спостерігається подія A, до загальної кількості n проведених експериментів;

Б) це є добуток кількості експериментів m, при яких спостерігається подія A, на загальну кількість n проведених експериментів;;

В) правильні відповіді А) та Б);

Г) інша відповідь.

24. Виберіть формулу для визначення геометричної ймовірності.

А) $P(A)=\frac{m}{n}$;

Б) $W(A)=\frac{m}{n}$;

В) $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$;
Г) інша відповідь.

25. Виберіть формулу для визначення статистичної ймовірності.
А) $P(A)=\dfrac{m}{n}$;
Б) $W(A)=\dfrac{m}{n}$;
В) $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$;
Г) інша відповідь.

26. Випадкові події *A* і *B* називають залежними ...
А) якщо події *A* і *B* не можуть відбуватися одночасно;
Б) якщо події *A* і *B* можуть відбуватися одночасно;
В) якщо поява однієї з них (*A* або *B*) не впливає на ймовірність появи іншої;
Г) якщо поява однієї з них (*A* або *B*) впливає на ймовірність появи іншої.

27. Випадкові події *A* і *B* називають незалежними ...
А) якщо події *A* і *B* не можуть відбуватися одночасно;
Б) якщо події *A* і *B* можуть відбуватися одночасно;
В) якщо поява однієї з них (*A* або *B*) не впливає на ймовірність появи іншої;
Г) якщо поява однієї з них (*A* або *B*) впливає на ймовірність появи іншої.

28. Виберіть формулу для визначення умовної ймовірності.
А) $P(A)=\dfrac{m}{n}$;
Б) $W(A)=\dfrac{m}{n}$;
В) $P_A(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$;
Г) інша відповідь.

29. В якому разі $P(A\cap B)=0$, де *A* і *B* – незалежні події?
А) коли $P(A)=0$ або $P(B)=0$;
Б) коли $P(A)=1$ і $P(B)=1$;
В) коли $P(A)\neq 0$ і $P(B)\neq 0$;
Г) інша відповідь.

30. Випадкові події *A* і *B* називають сумісними ...
А) якщо події *A* і *B* не можуть відбуватися одночасно;

Б) якщо події A і B можуть відбуватися одночасно;
В) якщо поява однієї з них (A або B) не впливає на ймовірність появи іншої;
Г) якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

31. Випадкові події A і B називають несумісними ...
А) якщо події A і B не можуть відбуватися одночасно;
Б) якщо події A і B можуть відбуватися одночасно;
В) якщо поява однієї з них (A або B) не впливає на ймовірність появи іншої;
Г) якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

32. Формула множення ймовірностей для двох залежних випадкових подій A і B має вигляд ...
А) $P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$;
Б) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$;
В) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
Г) $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

33. Формула множення ймовірностей для двох незалежних випадкових подій A і B має вигляд ...
А) $P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$;
Б) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$;
В) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
Г) $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

34. Формула додавання ймовірностей для двох сумісних випадкових подій A і B має вигляд ...
А) $P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$;
Б) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$;
В) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
Г) $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

35. Формула додавання ймовірностей для двох несумісних випадкових подій A і B має вигляд ...
А) $P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$;
Б) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$;
В) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
Г) $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

36. Чому дорівнює сума ймовірностей протилежних подій?
А) 0;
Б) -1;

В) 1;
Г) інша відповідь.

▲ *Формула повної ймовірності. Формула Байєса. Формула Бернуллі. Найімовірніше число появи випадкової події*

37. Властивості гіпотез (випадкових подій) у формулі повної ймовірності:
А) випадкові події $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ є несумісними;
Б) $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$;
В) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$;
Г) всі перераховані.

38. Формула повної ймовірності випадкової події A за наявності n гіпотез B_i має вигляд ...
А) $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \setminus B_i)$;
Б) $P(B_i \setminus A) = \dfrac{P(B_i)P(A \setminus B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \setminus B_i)}$;
В) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;
Г) інша відповідь.

39. Формула Байєса має вигляд ...
А) $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \setminus B_i)$;
Б) $P(B_i \setminus A) = \dfrac{P(B_i)P(A \setminus B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \setminus B_i)}$;
В) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;
Г) інша відповідь.

40. Формула Бернуллі має вигляд ...
А) $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \setminus B_i)$;
Б) $P(B_i \setminus A) = \dfrac{P(B_i)P(A \setminus B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \setminus B_i)}$;
В) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;

Г) інша відповідь.

41. Які експерименти відбуваються за схемою Бернуллі?
А) відбувається n залежних випробувань, подія A може відбутися зі сталою ймовірністю p, або не відбутися з ймовірністю q ($p+q=1$);
Б) відбувається n незалежних випробувань, подія A може відбутися зі сталою ймовірністю p, або не відбутися з ймовірністю q ($p+q=1$);
В) правильні відповіді А) та Б);
Г) інша відповідь.

42. Що називають найімовірнішим числом появи випадкової події A?
А) це є таке число k_0, для якого ймовірність $P_n(k_0)$ перевищує або не є меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків випробувань;
Б) це є таке число k_0, для якого ймовірність $P_n(k_0)=1$;
В) це є таке число k_0, для якого ймовірність $P_n(k_0)=0{,}5$;
Г) інша відповідь.

43. Чи завжди виконується нерівність $np-q \le k_0 \le np+p$ для найімовірнішого числа k_0?
А) так;
Б) ні;
В) в окремих випадках;
Г) інша відповідь.

▲ *Розподіл Пуассона для малоймовірних випадкових подій. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа*

44. Вибрати асимптотичну формулу, яка випливає із локальної теореми Муавра—Лапласа.
А) $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \setminus B_i)$;
Б) $P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}})-\Phi(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}})$, де Φ - функція Лапласа;
В) $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$;
Г) $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, де $\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

45. Вибрати асимптотичну формулу, яка випливає із інтегральної теореми Муавра—Лапласа.
А) $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \setminus B_i)$;

Б) $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}})$, де Φ - функція Лапласа;

В) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;

Г) $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, де $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

46. Перечисліть властивості функції Гауса $\varphi(x)$.

А) функція табульована, парна;
Б) функція табульована, непарна;
В) функція неправильна, кусково-симетрична;
Г) інша відповідь.

47. Перечисліть властивості функції Лапласа $\Phi(x)$.

А) функція табульована, парна;
Б) функція табульована, непарна;
В) функція неправильна, кусково-симетрична;
Г) інша відповідь.

48. За якої умови використовується формула Пуассона?
А) *n* – мале, *p* – мале *(p≤0,1)*;
Б) *n* – достатньо велике, *p* – мале *(p≤0,1)*;
В) *n* – достатньо велике, 0<*p*<*1*;
Г) інша відповідь.

49. За якої умови використовується локальна теорема Муавра—Лапласа?
А) *n* – мале, *p* – мале *(p≤0,1)*;
Б) *n* – достатньо велике, *p* – мале *(p≤0,1)*;
В) *n* – достатньо велике, 0<*p*<*1*;
Г) інша відповідь.

50. За якої умови використовується інтегральна теорема Муавра—Лапласа?
А) *n* – достатньо велике, 0<*p*<*1*, ймовірність появи випадкової події в межах від k_1 до k_2;
Б) *n* – достатньо велике, *p* – мале *(p≤0,1)*;
В) *n* – достатньо велике, 0<*p*<*1*;
Г) інша відповідь.

51. Записати формулу Пуассона для малоймовірних випадкових подій.

А) $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, де $\lambda = np$;

Б) $P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}})-\Phi(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}})$, де Φ - функція Лапласа;

В) $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$;

Г) $P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, де $\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

52. Чому дорівнює $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$?

А) $P_n(k)$;

Б) $P_n(k_1,k_2)$;

В) $\Phi(x)$;

Г) $\varphi(x)$.

53. Чому дорівнює $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$?

А) $P_n(k)$;

Б) $P_n(k_1,k_2)$;

В) $\Phi(x)$;

Г) $\varphi(x)$.

54. Чому дорівнює $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$?

А) $P_n(k)$;

Б) $P_n(k_1,k_2)$;

В) $\Phi(x)$;

Г) $\varphi(x)$.

▲ *Одномірні випадкові величини. Функція розподілу ймовірності. Щільність ймовірностей*

55. Дайте означення випадкової величини.

А) кожній елементарній події простору подій відповідає одне число або набір чисел, тобто визначена певна функція, яка називається випадковою величиною;

Б) подія, яка обов’язково відбудеться під час певного випробування;

В) подія, яка не може відбутися під час певного випробування;

Г) інша відповідь.

56. Дайте означення дискретної випадкової величини.

А) кожній елементарній події простору подій відповідає одне число або набір чисел, тобто визначена певна функція, яка називається дискретною випадковою величиною;
Б) якщо випадкова величина приймає всі значення з деякого скінченого або нескінченного проміжку, то вона називається дискретною;
В) якщо множина можливих значень випадкової величини приймає окремі ізольовані значення із визначеною ймовірністю, то вона називається дискретною;
Г) інша відповідь.

57. Дайте означення неперервної випадкової величини.
А) кожній елементарній події простору подій відповідає одне число або набір чисел, тобто визначена певна функція, яка називається неперервною випадковою величиною;
Б) якщо випадкова величина приймає всі значення з деякого скінченого або нескінченного проміжку, то вона називається неперервною;
В) якщо множина можливих значень випадкової величини приймає окремі ізольовані значення з визначеною ймовірністю, то вона називається неперервною;
Г) інша відповідь.

58. Яка випадкова величина називається одновимірною?
А) якщо елементарній події відповідає один елемент x;
Б) якщо елементарній події відповідає набір чисел;
В) якщо множина можливих значень випадкової величини приймає окремі ізольовані значення з визначеною ймовірністю;
Г) інша відповідь.

59. Як позначаються випадкові величини; їх можливі значення?
А) $A, B, C, ...;\ a, b, c, ...;$
Б) $A_1, A_2, A_3, ..., A_n;\ B_1, B_2, B_3, ..., B_n;\ \ldots;$
В) $X, Y, Z, ...;\ x, y, z, ...;$
Г) інша відповідь.

60. Дайте означення закону розподілу випадкової величини.
А) кожній елементарній події простору подій відповідає одне число або набір чисел, тобто визначена певна функція;
Б) співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їх ймовірностями;
В) якщо елементарній події відповідає набір чисел;
Г) інша відповідь.

61. Виберіть із перерахованих умову нормування для дискретної випадкової величини.

А) $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \setminus B_i)$;

Б) $P(B_i \setminus A) = \dfrac{P(B_i)P(A \setminus B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \setminus B_i)}$;

В) $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$;

Г) інша відповідь.

62. Які ви знаєте способи задання закону розподілу дискретної випадкової величини X?
А) графічний;
Б) довільний;
В) табличний;
Г) правильні відповіді А) та В).

63. Які ви знаєте способи задання закону розподілу неперервної випадкової величини X?
А) графічний;
Б) аналітичний;
В) довільний;
Г) правильні відповіді А) та Б).

64. Що називається функцією розподілу випадкової величини?
А) функція аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X<x$;
Б) перша похідна від інтегральної функції;
В) друга похідна від інтегральної функції;
Г) інша відповідь.

65. Перечисліть основні властивості інтегральної функції розподілу.
А) $0 \le F(x) \le 1$;
Б) $F(x)$ - неспадна;
В) $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$;
Г) всі перераховані.

66. Чи виконується властивість $0 \le F(x) \le 1$ для інтегральної функції розподілу?
А) так;
Б) ні;
В) не завжди;
Г) інша відповідь.

67. Чи виконується властивість $-1 \le F(x) \le 1$ для інтегральної функції розподілу?
А) так;
Б) ні;
В) не завжди;
Г) інша відповідь.

68. Чому дорівнює $P(a \le X \le b)$?
А) 0;
Б) 1;
В) $F(b) - F(a)$;
Г) всі перераховані.

69. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то в якому випадку $F(x) = 0$?
А) $x \le a$;
Б) $x \ge b$;
В) $a \le x \le b$;
Г) інша відповідь.

70. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то в якому випадку $F(x) = 1$?
А) $x \le a$;
Б) $x \ge b$;
В) $a \le x \le b$;
Г) інша відповідь.

71. Якщо X неперервна випадкова величини, то чому дорівнює ймовірність $P(X=x_i)$?
А) 0;
Б) -1;
В) 1;
Г) 0,5.

72. Що називається щільністю ймовірності неперервної випадкової величини X?
А) функція аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X>x$;
Б) перша похідна від інтегральної функції;
В) друга похідна від інтегральної функції;
Г) інша відповідь.

73. Чому дорівнює інтегральна функція $F(x)$, коли відома щільність $f(x)$?

А) $\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$;
Б) $f(x)+b$;
В) $f(x)-b$;
Г) інша відповідь.

74. Перечисліть основні властивості щільності.
А) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
Б) $f(x) \ge 0$;
В) $P(a \le X \le b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$;
Г) всі перераховані.

75. Умова нормування для диференціальної функції.
А) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
Б) $f(x) \ge 0$;
В) $P(a \le X \le b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$;
Г) всі перераховані.

▲ *Числові характеристики випадкових величин та їхні властивості*

76. Виберіть вивчені вами числові характеристики випадкових величин.
А) математичне сподівання;
Б) дисперсія;
В) середнє квадратичне відхилення;
Г) всі перераховані.

77. Виберіть вираз, який за означенням визначає математичне сподівання $M(X)$ дискретної випадкової величини?
А) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$;
Б) $M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$;
В) $M(X) = \int\limits_{a}^{b} xf(x)dx$;

Г) всі перераховані.

78. Виберіть вираз, який за означенням визначає математичне сподівання $M(X)$ неперервної випадкової величини для $\Omega \in (-\infty; +\infty)$?

А) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$;

Б) $M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$;

В) $M(X) = \int\limits_{a}^{b} xf(x)dx$;

Г) всі перераховані.

79. Виберіть вираз, який за означенням визначає математичне сподівання $M(X)$ неперервної випадкової величини для $\Omega \in [a; b]$?

А) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$;

Б) $M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$;

В) $M(X) = \int\limits_{a}^{b} xf(x)dx$;

Г) всі перераховані.

80. Основні властивості математичним сподіванням *M(X)*.

А) $M(C) = C$, якщо $C = const$;

Б) $M(CX) = CM(X)$;

В) $M(AX + B) = AM(X) + B$, де A і B - сталі;

Г) всі перераховані.

81. Чому дорівнює $M(C)$, де C — стала величина?

А) C;

Б) 0;

В) 1;

Г) інша відповідь.

82. Чому дорівнює $M(CX)$, де C — стала величина?

А) C;

Б) $M(X)$;

В) $CM(X)$;

Г) інша відповідь.

83. Якщо A і B — сталі величини, то чому дорівнює $M(AX+B)$?
А) $C = const$;
Б) $M(X)$;
В) $AM(X)+B$;
Г) всі пераховані.

84. Чому дорівнює *M(X-M(X))*?
А) C;
Б) 0;
В) 1;
Г) інша відповідь.

85. Що називають дисперсією випадкової величини?
А) щільність цієї величини;
Б) ймовірність цієї величини;
В) математичне сподівання квадрату відхилення цієї величини;
Г) інша відповідь.

86. Для неперервної випадкової величини X дисперсія виражається так:
А) $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$;
Б) $D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 p_i$;
В) $D(X)=\int_{a}^{b}(x-M(X))^2 f(x)dx$;
Г) всі пераховані.

87. Для дискретної випадкової величини X дисперсія виражається так:
А) $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$;
Б) $D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 p_i$;
В) $D(X)=\int_{a}^{b}(x-M(X))^2 f(x)dx$;
Г) всі пераховані.

88. Властивості дисперсії.
А) $D(C)=0$, якщо $C = const$;

Б) $D(CX) = C^2 D(X)$;

В) $D(AX + B) = A^2 D(X)$, де A і B - сталі;

Г) всі перераховані.

89. Чому дорівнює $D(C)$, де C — стала величина?

А) C;
Б) 0;
В) 1;
Г) інша відповідь.

90. Чому дорівнює $D(CX)$, де C — стала величина?

А) C;
Б) $D(X)$;
В) $CD(X)$;
Г) $C^2 D(X)$.

91. Якщо A і B — сталі величини, то чому дорівнює $D(AX + B)$?

А) $AD(X) + B$;
Б) $D(X)$;
В) $A^2 D(X)$;
Г) $AD(X)$.

92. Що називають середнім квадратичним відхиленням випадкової величини?

А) дисперсія в квадраті;
Б) корінь квадратний із дисперсії;
В) корінь кубічний із дисперсії;
Г) інша відповідь.

93. Що називають модою (Mo) випадкової величини X, якщо вона є дискретною?

А) те її значення, для якого виконується умова $F(Mo) = 0{,}5$;
Б) максимальне значення щільності ймовірності;
В) те її значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи;
Г) інша відповідь.

94. Що називається модою (Mo) неперервної випадкової величини?

А) те її значення, для якого виконується умова $F(Mo) = 0{,}5$;
Б) максимальне значення щільності ймовірності;
В) те її значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи;
Г) інша відповідь.

95. Що називають медіаною *(Me)* неперервної випадкової величини?
А) те її значення, для якого виконується умова $F(Me) = 0{,}5$;
Б) максимальне значення щільності ймовірності;
В) те її значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи;
Г) інша відповідь.

96. Чому дорівнює *F(Me)*?
А) -1;
Б) 0;
В) 1;
Г) 0,5.

97. Означення початкового моменту *k*-го порядку.
А) це дисперсія від величини X^k;
Б) це математичне сподівання від величини X^k;
В) це математичне сподівання від величини $(X - M(X))^k$;
Г) інша відповідь.

98. Означення центрального моменту *k*-го порядку.
А) це дисперсія від величини X^k;
Б) це математичне сподівання від величини X^k;
В) це математичне сподівання від величини $(X - M(X))^k$;
Г) інша відповідь.

99. Виберіть вирази для початкового та центрального моментів *k*-го порядку, якщо випадкова величина *X* є неперервною.

А) $\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx,\ \mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x)dx;$

Б) $\nu_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i{}^k p_i\ ,\ \mu_k = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i\ ;$

В) $\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k M(X)dx,\ \mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x - M(X))dx;$

Г) всі перераховані.

100. Напишіть вирази для початкового та центрального моментів *k*-го порядку, якщо випадкова величина *X* є дискретною.

А) $\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx,\ \mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x)dx;$

Б) $\nu_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i{}^k p_i\ ,\ \mu_k = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i\ ;$

В) $\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k M(X)dx,\ \mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x - M(X))dx;$

Г) всі перераховані.

▲ *Деякі розподіли дискретних випадкових величин. Основні закони неперервних випадкових величин*

101. Що називають біноміальним законом розподілу ймовірностей?

А) це закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи події в n незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі, в кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p;

Б) це закон розподілу цілочислової дискретної випадкової величини X, для якої ймовірність її можливих значень $P_k = P(X = k) = pq^{k-1}$, де $k = 1,2,...,n$;

В) це закон розподілу цілочислової дискретної випадкової величини X, для якої ймовірність її можливих значень $P_k = P(X = k) = \frac{1}{n}$;

Г) інша відповідь.

102. Що називають пуассонівським законом розподілу ймовірностей?

А) це закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи події в n незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі, в кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p;

Б) це закон розподілу цілочислової дискретної випадкової величини X, для якої ймовірність її можливих значень $P_k = P(X = k) = pq^{k-1}$, де $k = 1,2,...,n$;

В) це закон розподілу цілочислової дискретної випадкової величини X, для якої ймовірність її можливих значень $P_k = P(X = k) = \frac{1}{n}$;

Г) інша відповідь.

103. Що називають геометричним законом розподілу ймовірностей?

А) це закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи події в n незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі, в кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p;

Б) це закон розподілу цілочислової дискретної випадкової величини X, для якої ймовірність її можливих значень $P_k = P(X = k) = pq^{k-1}$, де $k = 1,2,...,n$;

В) це закон розподілу цілочислової дискретної випадкової величини X, для якої ймовірність її можливих значень $P_k = P(X = k) = \frac{1}{n}$;

Г) інша відповідь.

104. Визначення нормального закону розподілу.

А) це закон розподілу неперервної випадкової величини *X*, для якої щільність $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де $a=M(X), \sigma=\sigma(X)$;

Б) це закон розподілу неперервної випадкової величини *X*, якщо її щільність на проміжку $[a,b]$ має вигляд: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, \text{при } x\in[a,b] \\ 0, \quad \text{при } x\notin[a,b]\end{cases}$;

В) це закон розподілу неперервної випадкової величини *X*, якщо її щільність має вигляд: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda}, \text{при } x\geq 0 \\ 0, \quad \text{при } x<0\end{cases}$, де $\lambda>0$ - параметр розподілу;

Г) інша відповідь.

105. Що називають рівномірним законом розподілу ймовірностей?

А) це такий закон розподілу неперервної випадкової величини *X*, якщо щільність $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де $a=M(X), \sigma=\sigma(X)$;

Б) це закон розподілу неперервної випадкової величини *X*, якщо її щільність на проміжку $[a,b]$ має вигляд: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, \text{при } x\in[a,b] \\ 0, \quad \text{при } x\notin[a,b]\end{cases}$;

В) це закон розподілу неперервної випадкової величини *X*, якщо її щільність має вигляд: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda}, \text{при } x\geq 0 \\ 0, \quad \text{при } x<0\end{cases}$, де $\lambda>0$ - параметр розподілу;

Г) інша відповідь.

106. Що називають показниковим законом розподілу ймовірностей?

А) це закон розподілу неперервної випадкової величини *X*, якщо її щільність $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де $a=M(X), \sigma=\sigma(X)$;

Б) це закон розподілу неперервної випадкової величини *X*, якщо її щільність на проміжку $[a,b]$ має вигляд: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, \text{при } x\in[a,b] \\ 0, \quad \text{при } x\notin[a,b]\end{cases}$;

В) це закон розподілу неперервної випадкової величини *X*, якщо її щільність має вигляд: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda}, \text{при } x\geq 0 \\ 0, \quad \text{при } x<0\end{cases}$, де $\lambda>0$ - параметр розподілу;

Г) інша відповідь.

107. Числові характеристики для біноміального закону розподілу

$(M(X), D(X))$.

А) $M(X) = a, D(X) = \sigma^2$;

Б) $M(X) = \lambda, D(X) = \lambda$;

В) $M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}$;

Г) $M(X) = np, D(X) = npq$.

108. Числові характеристики пуассонівського закону розподілу $(M(X), D(X))$.

А) $a = M(X), \sigma^2 = D(X)$;

Б) $M(X) = \lambda, D(X) = \lambda$;

В) $M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}$;

Г) $M(X) = np, D(X) = npq$.

109. Числові характеристики геометричного закону розподілу $(M(X), D(X))$.

А) $a = M(X), \sigma^2 = D(X)$;

Б) $M(X) = \lambda, D(X) = \lambda$;

В) $M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}$;

Г) $M(X) = np, D(X) = npq$.

110. Числові характеристики нормального закону розподілу $(M(X), D(X))$.

А) $a = M(X), \sigma^2 = D(X)$;

Б) $M(X) = \lambda, D(X) = \lambda$;

В) $M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}$;

Г) $M(X) = np, D(X) = npq$.

111. Числові характеристики рівномірного закону розподілу $(M(X), D(X))$.

А) $a = M(X), \sigma^2 = D(X)$;

Б) $M(X) = \lambda, D(X) = \lambda$;

В) $M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}$;

Г) інша відповідь.

112. Числові характеристики показникового закону розподілу $(M(X), D(X))$.

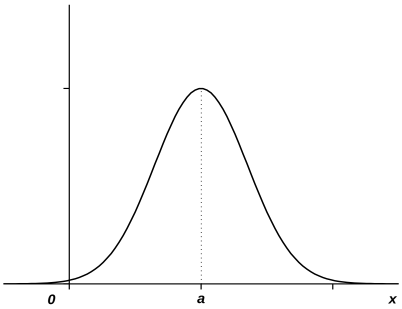
А) $a = M(X), \sigma^2 = D(X)$;

Б) $M(X) = \lambda, D(X) = \lambda$;

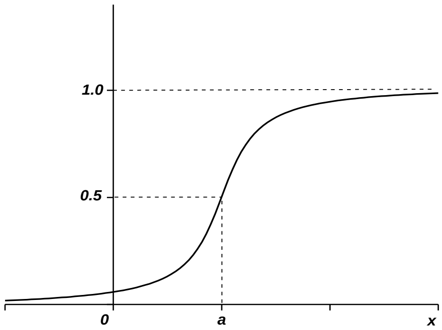
В) $M(X) = \dfrac{1}{p}, D(X) = \dfrac{q}{p^2}$;

Г) $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}, D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

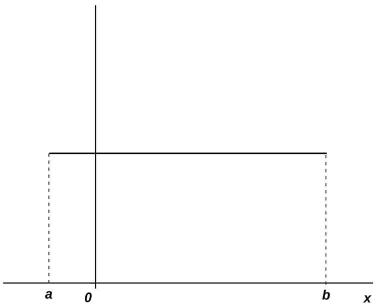
113. Виберіть графік функцій *f(x)* (щільності) для загального нормального закону.



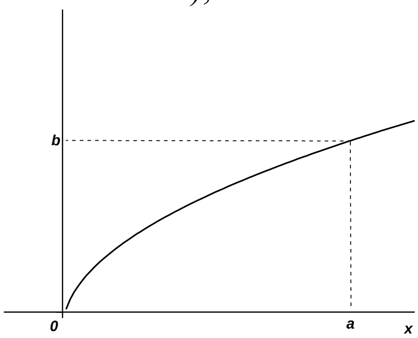
А);



Б);

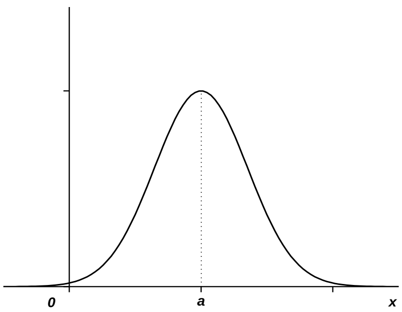


В);

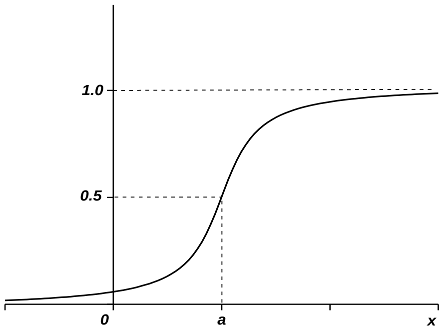


Г).

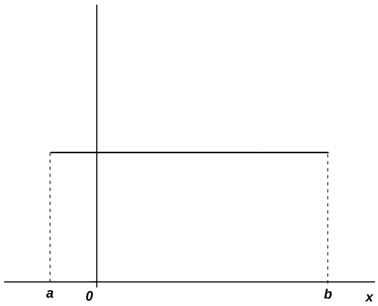
114. Виберіть графік функцій *F(x)* (функції розподілу) для загального нормального закону.



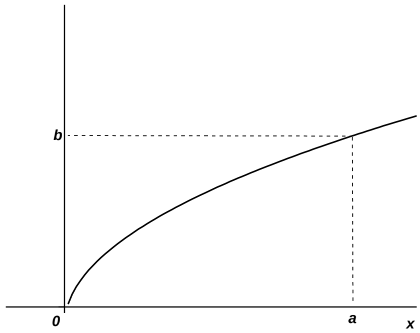
А);



Б);



В);



Г).

115. Правило трьох сигм для нормального закону (математичний вираз).
А) $P(|X-a|<3\sigma)=0{,}0027$;
Б) $P(|X-a|>3\sigma)=0{,}0027$;
В) обидві відповіді правильні;
Г) обидві відповіді неправильні.

▲ *Системи випадкових величин. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції та його властивості*

116. Випадкова величина називається n - мірною …
А) якщо елементарній події відповідає один елемент x;
Б) якщо елементарній події відповідає набір чисел $(X_1, X_2, ..., X_n)$, які одночасно появляються під час експерименту з певною ймовірністю;
В) якщо множина можливих значень випадкової величини приймає окремі ізольовані значення з визначеною ймовірністю;
Г) інша відповідь.

117. Що називається законом розподілу двомірної випадкової величини?
А) кожній елементарній події простору подій відповідає одне число, тобто визначена певна функція;
Б) якщо елементарній події відповідає набір чисел;
В) перелік усіх можливих значень $X=x_i, Y=y_i$ та відповідних їм ймовірностей спільної появи;
Г) інша відповідь.

118. Основні числові характеристики для системи двох дискретних випадкових величин.
А) $M(X),\ M(Y)$;
Б) $D(X), D(Y)$;
В) $\sigma(X), \sigma(Y)$;
Г) всі перераховані.

119. Означення функції розподілу системи двох випадкових величин.

А) функція аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X<x$;
Б) функція пари чисел (x, y), яка визначає ймовірність, коли X прийме значення $X<x$, а Y при цьому значення менше за y;
В) друга похідна від інтегральної функції;
Г) інша відповідь.

120. Чому дорівнює $P(a < X < b,\ c < Y < d)$?
А) 0;
Б) 1;
В) $F(b) - F(a)$;
Г) інша відповідь.

121. Перечисліть основні властивості функції розподілу двомірної випадкової величини.
А) $0 \le F(x, y) \le 1$;
Б) $F(x, y)$ - неспадна по кожному із аргументів;
В) $P(a < X < b,\ c < Y < d) = F(b,d) + F(a,c) - F(b,c) - F(a,d)$;
Г) всі перераховані.

122. Чи виконується властивість $0 \le F(x, y) \le 1$ для функції розподілу двомірної випадкової величини?
А) так;
Б) ні;
В) не завжди;
Г) інша відповідь.

123. Чи виконується властивість $-1 \le F(x, y) \le 1$ для функції розподілу двомірної випадкової величини?
А) так;
Б) ні;
В) не завжди;
Г) інша відповідь.

124. Що називається щільністю ймовірності неперервної двомірної випадкової величини (X,Y)?
А) функція аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X>x$;
Б) перша похідна від інтегральної функції;
В) друга частинна мішана похідна від функції розподілу двомірної випадкової величини;
Г) інша відповідь.

125. Чому дорівнює функції розподілу двомірної випадкової величини $F(x, y)$, коли відома щільність $f(x, y)$?

А) $\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$;

Б) $\int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy$;

В) $f(x,y)-b$;

Г) інша відповідь.

126. Перечисліть основні властивості щільності двомірної випадкової величини:

А) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = 1$;

Б) $f(x,y) \geq 0$;

В) $P(a < X < b, c < Y < d) = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} f(x,y)dxdy$;

Г) всі перераховані.

127. Умова нормування щільності двомірної випадкової величини:

А) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = 1$;

Б) $f(x,y) \geq 0$;

В) $P(a < X < b, c < Y < d) = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} f(x,y)dxdy$;

Г) всі перераховані.

128. Формула для $M(X)$ дискретної випадкової величини X, що утворює систему (X,Y), має вигляд...

А) $M(X) = \iint\limits_{\Omega} xf(x,y)dxdy$;

Б) $M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x_j p_{ij}$;

В) $M(X) = \int\limits_{a}^{b} xf(x)dx$;

Г) всі перераховані

129. Виберіть вираз, який за означенням визначає математичне сподівання $M(X)$ неперервної випадкової величини X, що утворює систему (X,Y).

А) $M(X) = \iint\limits_{\Omega} xf(x,y)dxdy$;

Б) $M(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_j p_{ij}$;

В) $M(X)=\int_a^b xf(x)dx$;

Г) всі перераховані.

130. Формула для $M(Y)$ дискретної випадкової величини Y, що утворює систему (X,Y), має вигляд...

А) $M(Y)=\iint_{\Omega} yf(x,y)dxdy$;

Б) $M(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij}$;

В) $M(X)=\int_a^b xf(x)dx$;

Г) всі перераховані

131. Виберіть вираз, який за означенням визначає математичне сподівання $M(Y)$ неперервної випадкової величини Y, що утворює систему (X,Y).

А) $M(Y)=\iint_{\Omega} yf(x,y)dxdy$;

Б) $M(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij}$;

В) $M(X)=\int_a^b xf(x)dx$;

Г) всі перераховані.

132. Виберіть вираз, який за означенням визначає дисперсію $D(Y)$ дискретної випадкової величини Y, що утворює систему (X,Y).

А) $D(Y)=\iint_{\Omega} y^2 f(x,y)dxdy-M^2(Y)$;

Б) $D(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j^2 p_{ij}-M^2(Y)$;

В) $D(X)=\iint_{\Omega} x^2 f(x,y)dxdy-M^2(X)$;

Г) $D(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_j^2 p_{ij}-M^2(X)$.

133. Виберіть вираз, який за означенням визначає дисперсію $D(Y)$ неперервної випадкової величини Y, що утворює систему (X,Y).

А) $D(Y)=\iint\limits_{\Omega} y^2 f(x,y)dxdy - M^2(Y)$;

Б) $D(Y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij} - M^2(Y)$;

В) $D(X)=\iint\limits_{\Omega} x^2 f(x,y)dxdy - M^2(X)$;

Г) $D(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2 p_{ij} - M^2(X)$.

134. Виберіть вираз, який за означенням визначає дисперсію $D(X)$ дискретної випадкової величини X, що утворює систему (X,Y).

А) $D(Y)=\iint\limits_{\Omega} y^2 f(x,y)dxdy - M^2(Y)$;

Б) $D(Y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij} - M^2(Y)$;

В) $D(X)=\iint\limits_{\Omega} x^2 f(x,y)dxdy - M^2(X)$;

Г) $D(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2 p_{ij} - M^2(X)$.

135. Виберіть вираз, який за означенням визначає дисперсію $D(X)$ неперервної випадкової величини X, що утворює систему (X,Y).

А) $D(Y)=\iint\limits_{\Omega} y^2 f(x,y)dxdy - M^2(Y)$;

Б) $D(Y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij} - M^2(Y)$;

В) $D(X)=\iint\limits_{\Omega} x^2 f(x,y)dxdy - M^2(X)$;

Г) $D(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2 p_{ij} - M^2(X)$.

136. Що визначає кореляційний момент?

А) наявність зв’язку між величинами X та Y;

Б) характер зв’язку між величинами X та Y;

В) нічого не визначає;

Г) інша відповідь.

137. Що визначає коефіцієнт кореляції?
А) наявність зв'язку між величинами X та Y;
Б) характер зв'язку між величинами X та Y;
В) нічого не визначає;
Г) інша відповідь.

138. Чому дорівнює кореляційний момент K_{xy}?
А) $\iint\limits_{\Omega} xyf(x,y)dxdy - M(X)M(Y)$, якщо величини X,Y - неперервні;
Б) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} y_i x_j p_{ij} - M(X)M(Y)$, якщо величини X,Y - дискретні;
В) правильні відповіді А) і Б);
Г) правильної відповіді немає.

139. Формула коефіцієнта кореляції має вигляд:
А) $r_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$;
Б) $r_{xy} = \dfrac{\sigma_x \sigma_y}{K_{xy}}$;
В) $r_{xy} = K_{xy}\sigma_x \sigma_y$;
Г) правильної відповіді немає.

140. Якщо $K_{xy} = 0$, то чому дорівнює r_{xy}?
А) -1;
Б) 0;
В) 1;
Г) правильної відповіді немає.

▲ *Умовні закони розподілу системи двох дискретних випадкових величин. Лінійна регресія. Функції від випадкових аргументів. Розподіл суми від двох випадкових аргументів. Розподіл "χ^2 – хі-квадрат". Розподіл Стьюдента. розподіл F Фішера–Снедекора*

141. Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то $f(x,y)$ обчислюється за формулою ...
А) $f(x)\cdot f(y)$;
Б) $f(x)+f(y)$;
В) $f(x)+f(y)-f(x,y)$;
Г) правильної відповіді немає.

142. Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то $F(x,y)=...$

А) $F(x)\cdot F(y)$;

Б) $F(x)+F(y)$;

В) $f(x)+f(y)-f(x,y)$;

Г) правильної відповіді немає.

143. Якщо $r_{xy}=\pm 1$, то X і Y зв’язані …

А) квадратичною функцією;

Б) лінійною функцією;

В) оберненою функцією;

Г) правильної відповіді немає.

144. Чи виконується властивість $-1\le r_{xy}\le 1$ для коефіцієнта кореляції двомірної випадкової величини?

А) так;

Б) ні;

В) не завжди;

Г) інша відповідь.

145. Що називається функцією від випадкового аргументу X?

А) випадкова величина Y, що не залежить від випадкової величини X;

Б) залежність змінної y від змінної x, при якій кожному значенню змінної x ставиться у відповідність єдине число y;

В) якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y і записують $Y=\varphi(X)$;

Г) інша відповідь.

146. Як обчислити щільність ймовірностей випадкової величини Y, якщо $Y=\varphi(X)$, де $\varphi(X)$ - монотонна функція, і відомий закон розподілу випадкової величини X?

А) $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$;

Б) $g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|$;

В) $g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\cdot f_2(z-x)dx$;

Г) $g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)\cdot f_2(y)dy$.

147. Математичне сподівання функції дискретного випадкового аргументу

$\left(Y=\varphi(X)\right)$:

А) $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$;

Б) $g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|$;

В) $M(Y)=M[\varphi(X)]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx$;

Г) $M(Y)=M[\varphi(X)]=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x_i)p_i$.

148. Математичне сподівання функції неперервного випадкового аргументу $\left(Y=\varphi(X)\right)$:

А) $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$;

Б) $g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|$;

В) $M(Y)=M[\varphi(X)]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx$;

Г) $M(Y)=M[\varphi(X)]=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x_i)p_i$.

149. Що називається функцією від двох випадкових аргументів X та Y?

А) випадкова величина Y, що не залежить від випадкової величини X;

Б) залежність змінної y від змінної x, при якій кожному значенню змінної x ставиться у відповідність єдине число y;

В) якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y і записують $Y=\varphi(X)$;

Г) якщо кожній парі можливих значень випадкових величини X та Y відповідає одне можливе значення випадкової величини Z і записують $Z=\varphi(X,Y)$.

150. Як визначається щільність $g(z)$, якщо $Z=X+Y$?

А) $g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_1(z-y)\cdot f_2(y)dy$;

Б) $g(z)=f[\phi(z)]\cdot|\phi'(z)|$;

В) $g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\cdot f_2(z-x)dx$;

Г) правильні відповіді А) та В).

151. Що називають розподілом χ^2?

А) це розподіл із $k = n$ ступенями вільності, при якому сума квадратів нормованих незалежних випадкових величин X_i $(i = 1,2,...,n)$ і таких, що $M(X_i) = 0$ та $\sigma(X_i) = 1$ задовольняють умові $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$;

Б) $T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}}$, де Z - нормована незалежна випадкова величина ($M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$), V - незалежна від Z величина розподілена за законом χ^2 із k ступенями вільності;

В) $F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$, де U і V - незалежна випадкові величини розподілені за законом χ^2 із k_1 і k_2 ступенями вільності;

Г) інша відповідь.

152. Виберіть із перерахованих розподіл Стьюдента:

А) це розподіл із $k = n$ ступенями вільності, при якому сума квадратів нормованих незалежних випадкових величин X_i $(i = 1,2,...,n)$ і таких, що $M(X_i) = 0$ та $\sigma(X_i) = 1$ задовольняють умові $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$;

Б) $T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}}$, де Z - нормована незалежна випадкова величина ($M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$), V - незалежна від Z величина розподілена за законом χ^2 із k ступенями вільності;

В) $F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$, де U і V - незалежна випадкові величини розподілені за законом χ^2 із k_1 і k_2 ступенями вільності;

Г) інша відповідь.

153. Виберіть із перерахованих розподіл Фішера—Снедекора:

А) це розподіл із $k = n$ ступенями вільності, при якому сума квадратів нормованих незалежних випадкових величин X_i $(i = 1,2,...,n)$ і таких, що $M(X_i) = 0$ та $\sigma(X_i) = 1$ задовольняють умові $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$;

Б) $T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}}$, де Z - нормована незалежна випадкова величина ($M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$), V - незалежна від Z величина розподілена за законом χ^2 із k ступенями вільності;

В) $F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$, де U і V - незалежна випадкові величини розподілені за законом χ^2 із k_1 і k_2 ступенями вільності;
Г) інша відповідь.

154. Загальний вигляд гамма-функції $\Gamma(x)$:
А) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)\cdot f_2(y)dy$;
Б) $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$;
В) $\int\limits_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$;
Г) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$.

155. Числові характеристики розподілу χ^2:
А) $M(X)=k,\ D(X)=2k$;
Б) $M(X)=\lambda,\ D(X)=\lambda$;
В) $M(X)=\frac{1}{p},\ D(X)=\frac{q}{p^2}$;
Г) $M(X)=np,\ D(X)=npq$.

▲ *Граничні теореми*

156. Що дають змогу встановити закони великих чисел?
А) умови, при яких сумарна поведінка досить великого числа випадкових величин втрачає випадковий характер і стає закономірною;
Б) умови, при яких можна мати надприбутки;
В) умови польоту космічних кораблів;
Г) серед перерахованих правильної відповіді немає.

157. Виберіть серед перерахованих виразів нерівність Чебишова.
А) $P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\le 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$;
Б) $P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$;
В) $P\left(\left|X-a\right|>3\sigma\right)\to 0$;
Г) $P\left(\left|X-a\right|<3\sigma\right)\to 1$.

158. Сформулювати умови, які мають виконуватися для нерівності Чебишова.
А) $M(X), D(X)$ - обмежені, $\varepsilon > 0$;
Б) $M(X), D(X)$ - необмежені, $\varepsilon < 0$;
В) відповіді А) та Б) - неправильні;
Г) серед перерахованих правильної відповіді немає.

159. Де використовується нерівність Чебишова?
А) для доведення теорем Чебишова, Бернуллі;
Б) для доведення закону великих чисел;
В) відповіді А) та Б) - правильні;
Г) серед перерахованих правильної відповіді немає.

160. Виберіть правильну відповідь, яка випливає з теореми Чебишова.
А) $\lim P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$ із зростанням n при $\varepsilon > 0$, якщо $M(X_i)$ і $D(X_i)$ - є обмеженими;
Б) $\lim\limits_{n \to \infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1$, де $W(A)$ - відносна частота появи випадкової події, p - ймовірність появи випадкової події A;
В) розподіл $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ наближається до нормального із зростання n, якщо $M(X_i) = 0$, $\sigma(X_i) = \sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|\nu_3| = |M(X^3)|$;
Г) інша відповідь.

161. Виберіть правильну відповідь, яка випливає з теореми Бернуллі.
А) $\lim P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$ із зростанням n при $\varepsilon > 0$, якщо $M(X_i)$ і $D(X_i)$ - є обмеженими;
Б) $\lim\limits_{n \to \infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1$, де $W(A)$ - відносна частота появи випадкової події, p - ймовірність появи випадкової події A;

В) розподіл $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ наближається до нормального із зростання n, якщо $M(X_i)=0$, $\sigma(X_i)=\sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|\nu_3|=\left|M\left(X^3\right)\right|$;

Г) інша відповідь.

162. Виберіть правильну відповідь, яка випливає з центральної граничної теореми.

А) $\lim P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$ із зростанням n при $\varepsilon>0$, якщо $M(X_i)$ і $D(X_i)$ - є обмеженими;

Б) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|W(A)-p|<\varepsilon)=1$, де $W(A)$ - відносна частота появи випадкової події, p - ймовірність появи випадкової події A;

В) розподіл $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ наближається до нормального із зростання n, якщо $M(X_i)=0$, $\sigma(X_i)=\sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|\nu_3|=\left|M\left(X^3\right)\right|$;

Г) інша відповідь.

163. Записати нерівність Чебишова для теореми Чебишова.

А) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|<\varepsilon\right)\geq \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{C}{n\varepsilon^2}\right)=1$;

Б) $P\left(|X-M(X)|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$;

В) $P\left(|X-a|>3\sigma\right)\to 0$;

Г) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(|W(A)-p|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$.

164. Записати нерівність Чебишова для теореми Бернуллі.

А) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|<\varepsilon\right)\geq \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{C}{n\varepsilon^2}\right)=1$;

Б) $P\left(|X-M(X)|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$;

В) $P\left(|X-a|>3\sigma\right)\to 0$;

Г) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|W(A)-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\dfrac{pq}{n\varepsilon^2}$.

▲ *Випадкові функції. Кореляційна теорія випадкових функцій*

165. Що називається випадковою функцією?

А) випадкова величина Y, що не залежить від випадкової величини X;

Б) функція невипадкового аргументу *t*, яка при кожному фіксованому значенні аргументу являється випадковою функцією і позначається $X(t)$;

В) якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y і записують $Y=\varphi(X)$;

Г) якщо кожній парі можливих значень випадкових величини X та Y відповідає одне можливе значення випадкової величини Z і записують $Z=\varphi(X,Y)$.

166. Що називається перерізом випадкової функції $X(t)$?

А) випадкова величина, яка відповідає фіксованому значенню аргументу випадкової функції;

Б) функція невипадкового аргументу *t*, яка при кожному фіксованому значенні аргументу являється випадковою функцією і позначається $X(t)$;

В) невипадкову функцію аргументу *t*, рівною якій може бути випадкова функція в результаті випробування;

Г) інша відповідь.

167. Що називається реалізацією випадкової функції?

А) випадкова величина, яка відповідає фіксованому значенню аргументу випадкової функції;

Б) функція невипадкового аргументу *t*, яка при кожному фіксованому значенні аргументу являється випадковою функцією і позначається $X(t)$;

В) невипадкову функцію аргументу *t*, рівною якій може бути випадкова функція в результаті випробування;

Г) інша відповідь.

168. Як позначаються випадкові функції?

А) X, Y, ...;

Б) $X(t)$, $Y(t)$, ...;

В) A, B, C, ...;

Г) інша відповідь.

169. Що називається випадковим (стохастичним) процесом?

А) випадкова величина, яка відповідає фіксованому значенню аргументу випадкової функції;

Б) випадкову функцію аргументу *t*, в якій *t* використовуються як час;

В) невипадкову функцію аргументу t, рівною якій може бути випадкова функція в результаті випробування;
Г) інша відповідь.

170. Що називається математичним сподіванням випадкової функції $X(t)$?
А) невипадкову функцію $m_X(t)$, значення якої при кожному фіксованому значенні t рівне математичному сподіванню перерізу, що відповідає тому ж фіксованому значенню t;
Б) невипадкову невід'ємну функцію $D_X(t)$, значення якої при кожному фіксованому значенні t рівне дисперсії перерізу, що відповідає тому ж фіксованому значенню t;
В) різницю між випадковою функцією і її математичним сподіванням;
Г) інша відповідь.

171. Геометричний зміст математичним сподіванням $m_X(t)$ випадкової функції $X(t)$.
А) це є «середня крива», навколо якої розташовані інші криві – реалізації;
Б) це є відстань від початку координат до точки t;
В) це є прямокутна область, куди попадає випадкова функція $X(t)$;
Г) інша відповідь.

172. Перерахуйте основні властивості математичного сподівання $m_X(t)$ випадкової функції $X(t)$.
А) $M[\varphi(t)] = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - невипадкова функція;
Б) $D[\varphi(t)] = 0$, де $\varphi(t)$ - невипадкова функція;
В) $K_X(t_1;t_2) = K_X(t_2;t_1)$;
Г) у пункті А) представлена тільки одна з властивостей.

173. Що називається дисперсією $D_X(t)$ випадкової функції $X(t)$?
А) невипадкову функцію $m_X(t)$, значення якої при кожному фіксованому значенні t рівне математичному сподіванню перерізу, що відповідає тому ж фіксованому значенню t;
Б) невипадкову невід'ємну функцію $D_X(t)$, значення якої при кожному фіксованому значенні t рівне дисперсії перерізу, що відповідає тому ж фіксованому значенню t;
В) різницю між випадковою функцією і її математичним сподіванням;
Г) інша відповідь.

174. Перерахуйте основні властивості дисперсії $D_X(t)$ випадкової функції $X(t)$.
А) $M[\varphi(t)] = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - невипадкова функція;

Б) $D[\varphi(t)] = 0$, де $\varphi(t)$ - невипадкова функція;
В) $K_X(t_1;t_2) = K_X(t_2;t_1)$;
Г) у пункті Б) представлена тільки одна з властивостей.

175. Що називається центрованою випадковою функцією?
А) невипадкову функцію $m_X(t)$, значення якої при кожному фіксованому значенні t рівне математичному сподіванню перерізу, що відповідає тому ж фіксованому значенню t;
Б) невипадкову невід'ємну функцію $D_X(t)$, значення якої при кожному фіксованому значенні t рівне дисперсії перерізу, що відповідає тому ж фіксованому значенню t;
В) різницю між випадковою функцією і її математичним сподіванням $\overset{0}{X}(t) = X(t) - m_X(t)$;
Г) інша відповідь.

176. Що називається кореляційною функцією $K_X(t_1;t_2)$ випадкової функції $X(t)$?
А) невипадкову функцію двох незалежних аргументів t_1 і t_2, значення якої при кожній фіксованій парі аргументів рівне кореляційному моменту перерізів, що відповідають цим же фіксованим значенням аргументів;
Б) невипадкову невід'ємну функцію $D_X(t)$, значення якої при кожному фіксованому значенні t рівне дисперсії перерізу, що відповідає тому ж фіксованому значенню t;
В) різницю між випадковою функцією і її математичним сподіванням $\overset{0}{X}(t) = X(t) - m_X(t)$;
Г) інша відповідь.

177. Перерахуйте основні властивості кореляційної функції $K_X(t_1;t_2)$ випадкової функції $X(t)$.
А) $M[\varphi(t)] = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - невипадкова функція;
Б) $D[\varphi(t)] = 0$, де $\varphi(t)$ - невипадкова функція;
В) $K_X(t_1;t_2) = K_X(t_2;t_1)$;
Г) у пункті В) представлена тільки одна з властивостей.

178. Чи правильно, що $M[X(t)+Y(t)] = m_x(t) + m_y(t)$?
А) так;
Б) ні;
В) ця властивість виконується лише за певних умов;
Г) інша відповідь.

179. Похідна випадкової функції за означенням задається виразом:

А) $X'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$;

Б) $Y(t)=\lim\limits_{\Delta s_i\to 0}\sum\limits_i X(s_i)\Delta s_i=\int\limits_0^t X(s)ds$, де s - змінна інтегрування, щоб відрізнити від t;

В) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|W(A)-p|<\varepsilon)=1$;

Г) інша відповідь.

180. Інтеграл від випадкової функції.

А) $X'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$;

Б) $Y(t)=\lim\limits_{\Delta s_i\to 0}\sum\limits_i X(s_i)\Delta s_i=\int\limits_0^t X(s)ds$, де s - змінна інтегрування, щоб відрізнити від t;

В) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|W(A)-p|<\varepsilon)=1$;

Г) інша відповідь.

Частина 2
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ З "МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ"

▲ *Елементи математичної статистики. Статистичний розподіл вибірки. Полігон частот і відносних частот*

1. Дати визначення генеральної сукупності.
А) це сукупність об’єктів, з якої зроблено вибірку;
Б) сукупність випадково взятих об’єктів;
В) множина однорідних об’єктів;
Г) інша відповідь.

2. Дати визначення вибіркової сукупності (вибірки).
А) це сукупність об’єктів, з якої зроблено вибірку;
Б) сукупність випадково взятих об’єктів;
В) множина однорідних об’єктів;
Г) інша відповідь.

3. Що називається обсягом (об’ємом) сукупності?
А) це кількість об’єктів цієї сукупності;
Б) це зростаючий числовий ряд варіант;
В) множина однорідних об’єктів;
Г) інша відповідь.

4. Що називається варіантою?
А) це кількість об’єктів цієї сукупності;
Б) це кількісна ознака, наприклад X, яка набуває конкретних числових значень $X = x_i$;
В) множина однорідних об’єктів;
Г) інша відповідь.

5. Що називається варіаційним рядом?
А) це спадний числовий ряд варіант;
Б) це довільний числовий ряд варіант;
В) це зростаючий числовий ряд варіант;
Г) це будь-який ряд, що набуває кількісна ознака.

6. Що таке частота варіант?
А) це відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n;
Б) це кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, \dots n_m$;
В) це кількість членів, які приймають рівні значення ознаки або знаходяться у середині певного інтервалу;
Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

7. Що називається рядом частот?

А) це відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n;

Б) це кількість членів, які приймають рівні значення ознаки або знаходяться у середині певного інтервалу;

В) це кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, \dots n_m$;

Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

8. Що таке відносна частота варіант?

А) це кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, \dots n_m$;

Б) це кількість членів, які приймають рівні значення ознаки або знаходяться у середині певного інтервалу;

В) це відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n;

Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

9. Дати визначення дискретного статистичного розподілу вибірки.

А) це кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, \dots n_m$;

Б) це довільний числовий ряд варіант;

В) це перелік варіант та відповідних їм частот;

Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

10. Що називається емпіричною функцією (комулятою)?

А) це кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, \dots n_m$;

Б) функція аргументу x, що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто $F^*(x) = \omega(X < x) = \frac{n_x}{n}$;

В) це перелік варіант та відповідних їм частот;

Г) функція аргументу x, що визначає відносну частоту події при $X \geq x$.

11. Властивості емпіричної функції $F^*(x)$:

А) $0 \leq F^*(x) \leq 1$ і $F^*(x)$ є неспадною функцією;

Б) $F^*(x_{\min}) = 0$, де $x_{\min}$ є найменшою варіантою варіаційного ряду;

В) $F^*(x)\Big|_{x > x_{\max}} = 1$, де $x_{\max}$ є найбільшою варіантою варіаційного ряду;

Г) всі перераховані.

12. Що являє собою полігон частот і відносних частот?

А) функція $F^*(x)$, яка є неспадною функцією;

Б) це є кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, \dots n_m$;

В) це є довільна площина, на якій точками зображені кількісні ознаки об’єкта, і які нагадують мішень після стрільби;

Г) це є дискретний статистичний розподіл вибірки, який можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають координати точок $(x_i;n_i)$ або $(x_i;\omega_i)$.

13. Вибіркова середня величина $\bar{x}_B$ для дискретного статистичного розподілу вибірки.

А) $\bar{x}_B = \dfrac{\sum x_i n_i}{n}$, де x_i - варіанта варіаційного ряду вибірки, n_i - частота цієї варіанти, n - обсяг вибірки $(n = \sum n_i)$;

Б) це є варіанта, що має найбільшу частоту появи;

В) це є варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

Г) $\bar{x}_B = \dfrac{\sum (x_i - x)^2 n_i}{n} = \dfrac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (x)^2$, x - варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант.

14. D_B для дискретного статистичного розподілу вибірки.

А) $D_B = \dfrac{\sum x_i n_i}{n}$, де x_i - варіанта варіаційного ряду вибірки, n_i - частота цієї варіанти, n - обсяг вибірки $(n = \sum n_i)$;

Б) це є варіанта, що має найбільшу частоту появи;

В) це є варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

Г) $D_B = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n} = \dfrac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2$.

15. σ_B для дискретного статистичного розподілу вибірки рівне

А) $D_B{}^2$;

Б) це є варіанта, що має найбільшу частоту появи;

В) це є варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

Г) $\sqrt{D_B}$.

16. Що таке медіана Me^* дискретного статистичного розподілу?

А) $D_B{}^2$;

Б) це є варіанта, що має найбільшу частоту появи;

В) це є варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

Г) $\sqrt{D_B}$.

17. Що таке мода Mo^* дискретного статистичного розподілу?

А) ${D_B}^2$;

Б) це є варіанта, що має найбільшу частоту появи;

В) це є варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

Г) $\sqrt{D_B}$.

18. Початковий момент k-го порядку ν_k^*:

А) $\dfrac{\sum x_i^k n_i}{n}$, де $k=1, 2, 3, \ldots$;

Б) $\dfrac{\mu_3^*}{\sigma_B^3}$;

В) $\dfrac{\sum (x_i-\bar{x}_B)^k n_i}{n}$, де $k=1, 2, 3, \ldots$;

Г) $\dfrac{\mu_4^*}{\sigma_B^4}-3$.

19. Що таке центральний момент k-го порядку μ_k^*:

А) $\dfrac{\sum x_i^k n_i}{n}$, де $k=1, 2, 3, \ldots$;

Б) $\dfrac{\mu_3^*}{\sigma_B^3}$;

В) $\dfrac{\sum (x_i-\bar{x}_B)^k n_i}{n}$, де $k=1, 2, 3, \ldots$;

Г) $\dfrac{\mu_4^*}{\sigma_B^4}-3$.

20. Асиметрія статистичного розподілу вибірки A_s^*:

А) $\dfrac{\sum x_i^k n_i}{n}$, де $k=1, 2, 3, \ldots$;

Б) $\dfrac{\mu_3^*}{\sigma_B^3}$;

В) $\dfrac{\sum (x_i-\bar{x}_B)^k n_i}{n}$, де $k=1, 2, 3, \ldots$;

Г) $\dfrac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3$.

21. Ексцес статистичного розподілу вибірки E_s^*:

А) $\dfrac{\sum x_i^k n_i}{n}$, де $k = 1, 2, 3, \ldots$;

Б) $\dfrac{\mu_3^*}{\sigma_B^3}$;

В) $\dfrac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^k n_i}{n}$, де $k = 1, 2, 3, \ldots$;

Г) $\dfrac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3$.

▲ *Точкові статистичні оцінки параметрів розподілу*

22. Що називається точковою статистичною оцінкою?
А) статистична оцінка випадкової величини, яка визначається одним числом;
Б) статистична оцінка, яка визначається двома числами, кінцями інтервалів;
В) оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) інша відповідь.

23. Яка точкова статистична оцінка називається незміщеною?
А) якщо $M(\theta^*) = \theta$, де θ - оціночний параметр генеральної сукупності, θ^* - його статистична оцінка;
Б) якщо $M(\theta^*) \neq \theta$;
В) це оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) це оцінка, яка у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки θ^* наближається до оцінювального параметра θ, а саме: $\lim\limits_{n \to \infty} P(|\theta^* - \theta| < \delta) = 1$.

24. Яка точкова статистична оцінка називається зміщеною?
А) якщо $M(\theta^*) = \theta$, де θ - оціночний параметр генеральної сукупності, θ^* - його статистична оцінка;
Б) якщо $M(\theta^*) \neq \theta$;
В) це оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) це оцінка, яка у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки θ^* наближається до оцінювального параметра θ, а саме: $\lim\limits_{n \to \infty} P(|\theta^* - \theta| < \delta) = 1$.

25. Яка точкова статистична оцінка називається ефективною?

А) якщо $M\left(\theta^*\right)=\theta$, де θ - оціночний параметр генеральної сукупності, θ^* - його статистична оцінка;
Б) якщо $M\left(\theta^*\right)\neq\theta$;
В) це оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) це оцінка, яка у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки θ^* наближається до оцінювального параметра θ, а саме: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right)=1$.

26. Яка точкова статистична оцінка називається ґрунтовною?
А) якщо $M\left(\theta^*\right)=\theta$, де θ - оціночний параметр генеральної сукупності, θ^* - його статистична оцінка;
Б) якщо $M\left(\theta^*\right)\neq\theta$;
В) це оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) це оцінка, яка у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки θ^* наближається до оцінювального параметра θ, а саме: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right)=1$.

27. У чому сутність методу моментів?
А) у прирівнюванні теоретичних моментів розглядуваного розподілу із відповідними емпіричними моментами того ж порядку;
Б) у віднаходженні максимуму функції одного або кількох оцінюваних параметрів;
В) у застосуванні властивостей невизначеного інтегралу і таблиці інтегралів;
Г) в основі методу лежить формула Бернуллі.

28. У чому сутність методу максимальної правдоподібності?
А) у прирівнюванні теоретичних моментів розглядуваного розподілу із відповідними емпіричними моментами того ж порядку;
Б) у віднаходженні максимуму функції одного або кількох оцінюваних параметрів;
В) у застосуванні властивостей невизначеного інтегралу і таблиці інтегралів;
Г) в основі методу лежить формула Бернуллі.

29. Що називається функцією правдоподібності дискретної випадкової величини X?
А) функцію аргументу θ: $L(x_1, x_2, ..., x_n;\theta) = \rho(x_1;\theta)\cdot\rho(x_2;\theta)\cdot ...\cdot\rho(x_n;\theta)$, де $p(x_i,\theta)$ - ймовірність у результаті одного випробування;
Б) функцію аргументу θ: $L(x_1, x_2, ..., x_n;\theta) = f(x_1;\theta)\cdot f(x_2;\theta)\cdot ...\cdot f(x_n;\theta)$, де $f(x_i,\theta)$ - щільність у результаті одного випробування;
В) функція виду $\sqrt{x}\sin\theta x$;
Г) інша відповідь.

30. Що називається функцією правдоподібності неперервної випадкової величини X ?
А) функцію аргументу θ: $L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = \rho(x_1; \theta) \cdot \rho(x_2; \theta) \cdot ... \cdot \rho(x_n; \theta)$, де $p(x_i, \theta)$ - ймовірність у результаті одного випробування;
Б) функцію аргументу θ: $L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot ... \cdot f(x_n; \theta)$, де $f(x_i, \theta)$ - щільність у результаті одного випробування;
В) функція виду $\sqrt{x} \sin \theta x$;
Г) інша відповідь.

▲ *Інтервальні оцінки параметрів розподілу*

31. Що називається інтервальною статистичною оцінкою?
А) статистична оцінка випадкової величини, яка визначається одним числом;
Б) статистична оцінка, яка визначається двома числами, кінцями інтервалів;
В) оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) інша відповідь.

32. Що називають точністю оцінки?
А) різниця між статистичною оцінкою θ^* та її оцінювальним параметром θ, взята за абсолютним значенням;
Б) статистична оцінка, яка визначається двома числами;
В) оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) інша відповідь.

33. Що називають надійністю γ оцінки?
А) величина, яка визначається із виразу $\frac{n}{n-1} \frac{\sum_i n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{\sum_i n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}$;
Б) це властивість, яка є в кожної людини;
В) нерівність $|\theta^* - \theta| < \delta$, яка справджується із певною ймовірністю $P(|\theta^* - \theta| < \delta) = \gamma$;
Г) інша відповідь.

34. Що називають довірчим інтервалом?
А) це довільний інтервал;
Б) це цілком визначений інтервал;
В) це інтервал, якому можна довіряти;
Г) Інтервал $\lfloor \theta^* - \delta; \theta^* + \delta \rfloor$, що покриває оцінюваний параметр θ генеральної сукупності із заданою надійністю γ.

35. Що називається виправленою дисперсією?

А) величина $\left[\theta^* - \delta; \theta^* + \delta\right]$;

Б) величина $\left|\theta^* - \theta\right| < \delta$;

В) величина $\dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} = \delta$;

Г) величина $s^2 = \dfrac{n}{n-1} D_B = \dfrac{n}{n-1} \dfrac{\sum\limits_i n_i\left(x_i - \bar{x}_B\right)^2}{n} = \dfrac{\sum\limits_i n_i\left(x_i - \bar{x}_B\right)^2}{n-1}$.

36. Що називають виправленим середнім квадратичним відхиленням?

А) величину, яка попадає в інтервал $\left[\theta^* - \delta; \theta^* + \delta\right]$;

Б) величину $\left|\theta^* - \theta\right| < \delta$;

В) величину $\dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} = \delta$;

Г) величину $s = \sqrt{\dfrac{n}{n-1} D_B}$.

37. Як побудувати довірчий інтервал для X_Γ із заданою надійністю γ при відомому значенні σ_Γ?

А) скористатися виразом $\bar{x}_B - \dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}$, де $\dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} = \delta$ - точність оцінки, n - об'єм вибірки, t - значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$, при якому $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$;

Б) скористатися виразом $\bar{x}_B - \dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$, де s - виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення, t_γ знаходиться за таблицями при заданих n і γ;

В) скористатися виразом $s(1-q) < \sigma_\Gamma < s(1+q)$ (при $q < 1$), $0 < \sigma_\Gamma < s(1+q)$ (при $q > 1$), де q - знаходиться за таблицями шукаємо;

Г) правильної відповіді тут немає.

38. Як побудувати довірчий інтервал для X_Γ із заданою надійністю γ при невідомому значенні σ_Γ і при обсягах вибірки $n < 30$?

А) скористатися виразом $\bar{x}_B - \dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}$, де $\dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} = \delta$ - точність оцінки, n - об'єм вибірки, t - значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$, при якому $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$;

Б) скористатися виразом $\bar{x}_B - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$, де s - виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення, t_γ знаходиться за таблицями при заданих n і γ;
В) скористатися виразом $s(1-q) < \sigma_\Gamma < s(1+q)$ (при $q<1$), $0<\sigma_\Gamma < s(1+q)$ (при $q>1$), де q - знаходиться за таблицями шукаємо;
Г) правильної відповіді тут немає.

39. Як побудувати довірчий інтервал із заданою надійністю γ для σ_Γ при обсягах вибірки $n<30$?
А) скористатися виразом $\bar{x}_B - \frac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}$, де $\frac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} = \delta$ - точність оцінки, n - об'єм вибірки, t - значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$, при якому $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$;
Б) скористатися виразом $\bar{x}_B - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$, де s - виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення, t_γ знаходиться за таблицями при заданих n і γ;
В) скористатися виразом $s(1-q) < \sigma_\Gamma < s(1+q)$ (при $q<1$), $0<\sigma_\Gamma < s(1+q)$ (при $q>1$), де q - знаходиться за таблицями шукаємо;
Г) правильної відповіді тут немає.

▲ *Статистичні гіпотези. Застосування критерію Пірсона для перевірки гіпотези про нормальний розподіл*

40. Дати визначення нульової гіпотези.
А) гіпотеза, яка припускає відсутність систематичних розбіжностей між невідомими параметрами генеральної сукупності і величиною, яка одержана внаслідок обробки вибірки;
Б) гіпотеза, яка протиставляє твердження висунутої гіпотези;
В) гіпотеза, яка має тільки одне припущення;
Г) гіпотеза, яка складається із скінченого або нескінченного числа простих гіпотез.

41. Дати визначення альтернативної гіпотези.
А) гіпотеза, яка припускає відсутність систематичних розбіжностей між невідомими параметрами генеральної сукупності і величиною, яка одержана внаслідок обробки вибірки;
Б) гіпотеза, яка протиставляє твердження висунутої гіпотези;
В) гіпотеза, яка має тільки одне припущення;

Г) гіпотеза, яка складається із скінченого або нескінченного числа простих гіпотез.

42. Що називають простою статистичною гіпотезою?
А) гіпотеза, яка припускає відсутність систематичних розбіжностей між невідомими параметрами генеральної сукупності і величиною, яка одержана внаслідок обробки вибірки;
Б) гіпотеза, яка протиставляє твердження висунутої гіпотези;
В) гіпотеза, яка має тільки одне припущення;
Г) гіпотеза, яка складається із скінченого або нескінченного числа простих гіпотез.

43. Що називають складною статистичною гіпотезою?
А) гіпотеза, яка припускає відсутність систематичних розбіжностей між невідомими параметрами генеральної сукупності і величиною, яка одержана внаслідок обробки вибірки;
Б) гіпотеза, яка протиставляє твердження висунутої гіпотези;
В) гіпотеза, яка має тільки одне припущення;
Г) гіпотеза, яка складається із скінченого або нескінченного числа простих гіпотез.

44. Що називають статистичним критерієм?
А) випадкову величину K, яка використовується для перевірки нульової гіпотези;
Б) цілком закономірну величину K, яка використовується для перевірки нульової гіпотези;
В) випадкову величину K, яка використовується для перевірки домашніх робіт студентів;
Г) інша відповідь.

45. Що називається емпіричним (спостережуваним) значенням критерію?
А) випадкова величина K, яка використовується для перевірки нульової гіпотези;
Б) значення критерію, який обчислюють за результатом вибірки;
В) випадкову величину K, яка використовується для перевірки домашніх робіт студентів;
Г) інша відповідь.

46. Що називається областю прийняття нульової гіпотези?
А) множину всіх можливих значень статистичного критерію;
Б) сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не відхиляється;
В) сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не приймається;

Г) інша відповідь.

47. Що називається критичною область статистичного критерію?
А) множину всіх можливих значень статистичного критерію;
Б) сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не відхиляється;
В) сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не приймається;
Г) інша відповідь.

48. Що називається критичною точкою статистичного критерію?
А) точка, яка поділяє множину всіх можливих значень статистичного критерію;
Б) сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не відхиляється;
В) сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не приймається;
Г) інша відповідь.

49. Які Ви знаєте види критичних областей статистичного критерію?
А) лівобічні;
Б) правобічні;
В) двобічні;
Г) всі перераховані.

50. Що таке рівень значущості α?
А) ймовірність, що буде відкинута правильна альтернативна гіпотеза;
Б) ймовірність, що буде прийнята неправильна нульова гіпотеза;
В) ймовірність, що буде відкинута правильна нульова гіпотеза;
Г) всі перераховані.

51. Помилки першого роду при перевірці гіпотез полягають у тому, що:
А) буде відкинута неправильна нульова гіпотеза;
Б) буде прийнята неправильна нульова гіпотеза;
В) буде відкинута правильна нульова гіпотеза;
Г) всі перераховані.

52. Помилки другого роду при перевірці гіпотез полягають у тому, що:
А) буде відкинута неправильна нульова гіпотеза;
Б) буде прийнята неправильна нульова гіпотеза;
В) буде відкинута правильна нульова гіпотеза;
Г) всі перераховані.

53. Що називають потужністю критерію?

А) ймовірність попадання критерію в критичну область при умові, що справедлива альтернативна гіпотеза;
Б) ймовірність того, що нульова гіпотеза буде відкинута, якщо справедлива альтернативна гіпотеза;
В) відповіді А) і Б) правильні;
Г) інша відповідь.

54. Записати формули для обчислення теоретичних частот, якщо припускається, що ознака X генеральної сукупності має нормальний закон розподілу.
А) $n_i' = \frac{nh}{\sigma_B}$, де n - обсяг вибірки, h - крок (різниця між двома сусідніми варіантами);
Б) $n_i' = \varphi(u_i)$, де $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}$, $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$;
В) $n_i' = \frac{nh}{\sigma_B}\varphi(u_i)$, де n - обсяг вибірки, h - крок (різниця між двома сусідніми варіантами), $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}$, $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$;
Г) інша відповідь.

55. Критерій узгодженості Пірсона.
А) $\chi^2_{спост} = \sum\limits_{\text{i}} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i}$;
Б) $\chi_{спост} = \sum\limits_{\text{i}} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i^2}$;
В) $\chi^2_{спост} = \sum\limits_{\text{i}} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$;
Г) інша відповідь.

▲ *Статистична і кореляційна залежність. Метод найменших квадратів. Вибіркове рівняння регресії. Криволінійна та множинна кореляція*

56. Дати визначення статистичної залежності між ознаками X та Y.
А) це така залежність, при якій зміна однієї з величин веде до змін розподілу іншої;
Б) це така залежність, при якій зміна однієї з величин не веде до змін розподілу іншої;
В) це така залежність, яка проявляється в тому, що при зміні однієї із величин змінюється середнє значення іншої;

Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

57. Що означає кореляційна залежність між ознаками X та Y?
А) це така залежність, при якій зміна однієї з величин веде до змін розподілу іншої;
Б) це така залежність, при якій зміна однієї з величин не веде до змін розподілу іншої;
В) це така залежність, яка проявляється в тому, що при зміні однієї із величин змінюється середнє значення іншої;
Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

58. Що називається функціями регресії?
А) можливі залежності між змінними X і Y за відсутності кореляційного зв'язку між змінними;
Б) можливі залежності між змінними X і Y за наявності кореляційного зв'язку між змінними;
В) це всі спадні функції між змінними X і Y;
Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

59. Який метод використовується для знаходження невідомих параметрів, якщо між випадковими величинами X та Y існує лінійна функціональна залежність $Y = aX + b$?
А) метод невизначених коефіцієнтів;
Б) метод найбільших квадратів;
В) метод найменших квадратів;
Г) всі перераховані методи.

60. Що називається умовним середнім $\bar{y}_x$?
А) середнє арифметичне значень Y, які спостерігалися і тих, що відповідають $X = x$;
Б) середнє арифметичне значення X, які спостерігалися і тих, що відповідають $Y = y$;
В) можлива залежність між змінними X і Y за наявності кореляційного зв'язку між змінними;
Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

61. Що називається умовним середнім $\bar{x}_y$?
А) середнє арифметичне значень Y, які спостерігалися і тих, що відповідають $X = x$;
Б) середнє арифметичне значення X, які спостерігалися і тих, що відповідають $Y = y$;
В) можлива залежність між змінними X і Y за наявності кореляційного зв'язку між змінними;

Г) інша відповідь.

62. Що називається вибірковим рівнянням регресії $\bar{y}_x = f^*(x)$?
А) це таке рівняння, в якому умовне середнє $\bar{y}_x$ залежить від x;
Б) це таке рівняння, в якому умовне середнє $\bar{y}_x$ не залежить від x;
В) це таке рівняння, в якому умовне середнє $\bar{y}_x$ залежить від умовного середнього $\bar{x}_y$;
Г) інша відповідь.

63. Що називається вибірковою регресією Y на X?
А) функцію $Y = \varphi(X)$;
Б) функцію $\bar{x}_y = \varphi^*(y)$;
В) функцію $\bar{y}_x = f^*(x)$;
Г) інша відповідь.

64. Формула для знаходження вибіркового коефіцієнта регресії ρ_{yx} має вигляд …
А) $\rho_{yx} = \dfrac{\sum xy - \sum x}{\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$;
Б) $\rho_{yx} = \dfrac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$;
В) $\rho_{yx} = \dfrac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$;
Г) інша відповідь.

65. Формула для знаходження вибіркового коефіцієнта кореляції r_B має вигляд …
А) $r_B = \dfrac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y}$;
Б) $r_B = \dfrac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$;
В) $r_B = \dfrac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$;
Г) інша відповідь.

66. Для чого служить вибірковий коефіцієнт кореляції r_B?
А) для вимірювання несумісного зв’язку між Y та X;

Б) для вимірювання нелінійного зв'язку між Y та X;
В) для вимірювання лінійного зв'язку між Y та X;
Г) інша відповідь.

67. Яка кореляція називається криволінійною?
А) якщо графік $\overline{y}_x = f^*(x)$ зображається кривою лінією;
Б) якщо кореляція виражається криволінійним інтегралом першого роду;
В) якщо кореляція виражається криволінійним інтегралом першого роду;
Г) інша відповідь.

68. Чи можна застосовувати метод найменших квадратів для знаходження невідомих параметрів криволінійної кореляції?
А) можна;
Б) неможна;
В) можна, але не завжди;
Г) інша відповідь.

69. Що називається кореляцією?
А) функція $Y = \varphi(X)$;
Б) залежність між числовими випадковими величинами, що не мають строгого функціонального характеру;
В) функція $\overline{y}_x = f^*(x)$;
Г) інша відповідь.

70. Що називається множинною кореляцією?
А) залежність між числовими невипадковими величинами, що не мають строгого функціонального характеру;
Б) залежність між числовими випадковими величинами, що мають строго функціональний характер;
В) це кореляція, при якій досліджують зв'язок між декількома ознаками;
Г) інша відповідь.

ТАБЛИЦЯ ВІДПОВІДЕЙ

№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь
Частина 1															
1	Б	24	В	47	Б	70	Б	93	В	116	Б	139	А	162	В
2	В	25	Б	48	Б	71	А	94	Б	117	В	140	Б	163	А
3	Г	26	Г	49	В	72	Б	95	А	118	Г	141	А	164	Г
4	Б	27	В	50	А	73	А	96	Г	119	Б	142	А	165	Б
5	В	28	В	51	А	74	Г	97	Б	120	Г	143	Б	166	А
6	А	29	А	52	Б	75	А	98	В	121	Г	144	А	167	В
7	Г	30	Б	53	Г	76	Г	99	А	122	А	145	В	168	Б
8	Г	31	А	54	В	77	Б	100	Б	123	Б	146	Б	169	Б
9	Г	32	А	55	А	78	А	101	А	124	В	147	Г	170	А
10	А	33	Б	56	В	79	В	102	Г	125	Б	148	В	171	А
11	Б	34	В	57	Б	80	Г	103	Б	126	Г	149	Г	172	Г
12	В	35	Г	58	А	81	А	104	А	127	А	150	Г	173	Б
13	Г	36	В	59	В	82	В	105	Б	128	Б	151	А	174	Г
14	Б	37	Г	60	Б	83	В	106	В	129	А	152	Б	175	В
15	В	38	А	61	В	84	Б	107	Г	130	Б	153	В	176	А
16	Г	39	Б	62	Г	85	В	108	Б	131	А	154	В	177	Г
17	А	40	В	63	Г	86	В	109	В	132	Б	155	А	178	А
18	Б	41	Г	64	А	87	Б	110	А	133	Г	156	А	179	А
19	В	42	Б	65	Г	88	Г	111	Г	134	В	157	Б	180	Б
20	В	43	Б	66	А	89	Б	112	Г	135	А	158	А		
21	А	44	А	67	Б	90	Г	113	А	136	А	159	В		
22	А	45	А	68	В	91	В	114	Б	137	Б	160	А		
23	А	46	А	69	А	92	Б	115	Б	138	В	161	Б		
Частина 2															
1	А	10	Б	19	В	28	А	37	А	46	Б	55	В	64	В
2	Б	11	Г	20	Б	29	А	38	Б	47	В	56	А	65	А
3	А	12	Г	21	Г	30	Б	39	В	48	А	57	В	66	В
4	Б	13	А	22	А	31	Б	40	А	49	Г	58	Б	67	А
5	А	14	Г	23	А	32	А	41	Б	50	В	59	В	68	А
6	В	15	Г	24	Б	33	В	42	В	51	В	60	А	69	Б
7	В	16	В	25	В	34	Г	43	Г	52	Б	61	Б	70	В
8	В	17	Б	26	Г	35	Г	44	А	53	Б	62	А		
9	В	18	А	27	А	36	Г	45	Б	54	В	63	В		

РЕКОМЕНДАЦІЇ СТУДЕНТАМ ЩОДО ВИКОНАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

1. Перш за все, вислухайте інструкції викладача до тестових завдань. Також розберіться, яким чином слід заповнювати вільні поля, призначені для відповіді, якщо тести представлені в паперовому варіанті.

2. Перш ніж приступати до вирішення тесту, поставте собі наступні запитання: «Що конкретно питається в завданні?», «Що я знаю з цього питання?».

3. Обмежте час відповіді на одне питання. Всі питання дають однакову кількість балів. Радимо для економії часу пропустити завдання, яке не вдається виконати відразу, і переходити до наступного. Можливо, в кінці іспиту (контрольного заходу), у вас буде час до нього повернутися.

4. Прагніть не робити помилок із-за неуважності. Незважаючи на хвилювання, читайте питання уважно, і постарайтеся не пропускати питання, не зрозумівши, про що питається, і не розглянувши всі варіанти відповіді.

5. Виключайте невірні варіанти. Навіть якщо ви не знаєте правильної відповіді на питання, спробуйте свідомо виключити неправильні варіанти – іноді це зробити простіше, ніж вирішити завдання. Відкидайте невірні варіанти до тих пір, поки не залишиться один правильний. Із кожним виключеним невірним варіантом шанси вибрати вірну відповідь тільки зростають.

6. Якщо ви зовсім не знаєте як відповісти на завдання, намагайтеся вгадати, яка відповідь може бути правильною, на основі знань, що є у вас.

7. Перед контрольним заходом постарайтеся пройти всі завдання від початку до кінця. Навіть добре знання теоретичного матеріалу не гарантує успішну здачу тестів.

8. Під час підготовки до іспиту прагніть виконувати тести, імітуючи реальний іспит. Перед тим, як йти на реальний іспит (комп'ютерний варіант), дізнайтеся, як працювати з тестовою комп'ютерною програмою. Підрахуйте, скільки часу Ви можете витрачати на кожне питання, так щоб цього часу вистачило на весь тест.

ДОДАТОК

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{ч} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115	1,80	0,4641	2,50	0,4938
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131	1,81	0,4649	2,52	0,4941
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147	1,82	0,4656	2,54	0,4945
0,03	0,0120	0.48	0,1844	0,93	0,3238	138	0,4162	1,83	0,4664	2,56	0,4948
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177	1,84	0,4671	2,58	0,4951
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192	1,85	0,4678	2,60	0,4953
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207	1,86	0,4686	2,62	0,4956
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222	1,87	0,4693	2,64	0,4959
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236	1,88	0,4699	2,66	0,4961
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251	1,89	0,4706	2,68	0,4963
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265	1,90	0,4713	2,70	0,4965
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279	1,91	0,4719	2,72	0,4967
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292	1,92	0,4726	2,74	0,4969
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306	1,93	0,4732	2,76	0,4971
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319	1,94	0,4738	2,78	0,4973
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332	1,95	0,4744	2,80	0,4974
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345	1,96	0,4750	2,82	0,4976
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357	1,97	0,4756	2,84	0,4977
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370	1,98	0,4761	2,86	0,4979
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382	1,99	0,4767	2,88	0,4980
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394	2,00	0,4772	2,90	0,4981
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406	2,02	0,4783	2,92	0,4982
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418	2,04	0,4793	2,94	0,4984
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429	2,06	0,4803	2,96	0,4985
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441	2,08	0,4812	2,98	0,4986
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0.4452	2,10	0,4821	3,00	0,49865
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463	2,12	0,4830	3,20	0,49931
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474	2,14	0,4838	3,40	0,49966
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484	2,16	0,4846	3,60	0,499841
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495	2,18	0,4854	3,80	0,499928
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505	2,20	0,4861	4,00	0,499968
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515	2,22	0,4868	4,50	0,499997
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4528	2,24	0,4875	5,00	0,499997
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535	2,26	0,4881		
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545	2,28	0,4887		
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554	2,30	0,4893		
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564	2,32	0,4898		
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573	2,34	0,4904		
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582	2,36	0,4909		
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1.74	0,4591	2,38	0,4913		
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599	2,40	0,4918		
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608	2,42	0,4922		
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616	2,44	0,4927		
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4627	2,46	0,4931		
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4638	2,48	0,4934		

Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів вільнос	Рівень значущості α					
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0.99**
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13.3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,.4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18.5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,50
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4.40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35.2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36.4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37.7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число ступенів вільності	Рівень значущості α (двохстороння критична область)					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6.97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05-	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2;05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значущості α (одностороння критична область)					

Критичні точки розподілу *F* Фішера-Снедекора
(k_1 — число ступенів вільності більшої дисперсії, k_2 — число ступенів вільності меншої дисперсії, рівень значущості α = 0,01)

k_2	k_1											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,85	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

γ	**0,95**	**0,99**	**0,999**	γ / n	**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	4,60	8,61	**20**	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	**25**	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	**30**	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	**35**	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	**40**	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	**45**	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	**50**	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3.11	4,44	**60**	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	**70**	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	**80**	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	**90**	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	**100**	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	**120**	1,980	2.617	3.374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця значень $q_\gamma = q(\gamma, n)$

γ \ n	**0,95**	**0,99**	**0,999**	γ \ n	**0,95**	**0.99**	**0,999**
5	1.37	2.67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0.56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,39	0,43
12	0,55	0,90	1,45	**60**	0,188	0,269	0.38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	.0,245	0.34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	4,226	0,31
15	0,46	0,73	1.1*	**90**	0,151	0.211	0.29
16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0»27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0.160	0,211
18	0.40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0.120	0.162

КОРОТКИЙ ДОВІДНИК ФОРМУЛ

КОМБІНАТОРИКА

$P_n = n!$ - **перестановка**.

$P_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$ - **перестановка з повтореннями**.

$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ - **розміщення**.

$\overline{A}_n^k = n^k$ - **розміщення з повтореннями**.

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - **комбінації**.

$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ - **комбінації з повторенням**.

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k; \; C_n^k = C_n^{n-k}; \; C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \; 0! = 1, \; 1! = 1, \; (n+1)! = n!(n+1).$$

ГРАНИЦІ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e; \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0+} x^x = 1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = a, \quad -\infty < a < +\infty.$$

ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \; (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{f^2}, \text{ де } f = f(x) \text{ і } g = g(x);$$

$$\left(f(kx+b)\right)' = kf'(kx+b), \; \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

ПОХІДНІ

$$C' = 0, \; C = const; \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}; \quad (a^x)' = a^x \ln a; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(e^x)' = e^x; \quad (\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x; \quad (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

НЕВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ

$$\int dx = x + C; \; \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \; \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = -\sin x + C; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C; \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C; \; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Формула Лейбніца $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Формула інтегрування частинами $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$**.**

Формула Пуассона (інтеграл ймовірностей) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ **.**

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}.$$

Гамма-функція $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$, $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3.....(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$.

Формула Стирлінга при великих значеннях n: $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Більш точна формула $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}-\frac{571}{2488320n^4}+.....\right)$.

РЯДИ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \; x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \; x \in (-1; 1).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in (-\infty; +\infty).$$

$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + x^m$ **- біном Ньютона.**

ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

Α	**α**	альфа	**Ν**	**ν**	ню
Β	**β**	бета	**Ξ**	**ξ**	ксі
Γ	**γ**	гамма	**Ο**	**ο**	омікрон
Δ	**δ**	дельта	**Π**	**π**	пі
Ε	**ε**	епсилон	**Ρ**	**ρ**	ро
Ζ	**ζ**	зета	**Σ**	**σ**	сигма
Η	**η**	ета	**Τ**	**τ**	тау
Θ	**θ**	тета	**Υ**	**υ**	іпсилон
Ι	**ι**	йота	**Φ**	**φ**	фі
Κ	**κ**	каппа	**Χ**	**χ**	хі
Λ	**λ**	лямбда	**Ψ**	**ψ**	псі
Μ	**μ**	мю	**Ω**	**ω**	омега

$\pi = 3{,}14159$, $e = 2{,}71828$, $\sqrt{2} = 1{,}41421$, $\sqrt{3} = 1{,}73205$

КОРОТКИЙ СЛОВНИК ТЕРМІНІВ (ГЛОСАРІЙ)

Альтернативна (конкуруюча) **гіпотеза** – гіпотеза, яка протиставляється *нульовій* гіпотезі.

Варіанта - конкретне числове значення кількісної ознаки, наприклад X .

Варіаційний ряд - зростаючий числовий ряд варіант.

Вибірка - сукупність випадково взятих об'єктів.

Випадкова величина - вимірюване відображення простору елементарних результатів даного імовірнісного експерименту в множині дійсних чисел. Імовірнісна модель для експериментів із невизначеним числовим результатом. Прикладом *випадкової величини* може служити кількість очок, що випала при підкиданні грального кубика. Ця випадкова величина приймає значення 1, 2, 3, 4, 5, 6 із ймовірністю 1/6 кожне.

Випадкова подія - подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися.

Випадкова похибка - складова похибки вимірювання, яка змінюється випадковим чином при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини.

Випадкова функція - функція невипадкового аргументу t, яка при кожному фіксованому значенні аргументу являється випадковою величиною.

Випадковим (стохастичним) процесом називають випадкову функцію аргументу t, яка використовує t як час.

Випадкові числа - можливі значення r неперервної випадкової величини R, яка розподілена рівномірно в інтервалі $(0;1)$.

Вірогідна подія - подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування.

Генеральна сукупність - сукупність об'єктів, з яких зроблено вибірку.

Дискретна випадкової величини – величина, яка приймає окремі ізольовані значення з визначеними ймовірностями.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрату відхилення цієї величини.

Екстраполювання (екстраполяція) – знаходження значення функції для аргументу, що знаходиться за межами таблиці даних (даних експерименту).

Емпіричний - спостережуваний.

Емпіричний статичний розподіл – результат спостережень, звичайно представляється у формі таблиці чисел або гістограми, в якій вказується, скільки разів випадкова змінна (частота) приймала певні значення або перебувала в певних інтервалах значень.

Залежними випадковими подіями називають події, якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

Закон великих чисел - сукупність теорем, в яких вказано умови, при яких сумарна поведінка досить великого числа випадкових величин втрачає випадковий характер і стає закономірною.

Закон розподілу випадкової величини – співвідношення, які встановлюють зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями.

Інтервальна статистична оцінка **– статистична оцінка, яка визначається двома числами, кінцями інтервалів, називається.**

Інтерполювання (інтерполяція) – відшукування значення функції, що відповідає проміжним значенням аргументу.

Ймовірність події - ступінь правдоподібності події, нормована міра на імовірнісному просторі. Приймає числові значення в проміжку між 0 і 1. У прикладі з підкиданням грального кубика ймовірність випадання на кожній з граней рівна 1/6.

Кореляція - залежність між числовими випадковими величинами, що не мають, взагалі кажучи, строго функціонального характеру. На відміну від функціональної залежності, кореляція, як правило, розглядається тоді, коли, принаймні, одна з величин залежить не тільки від іншої, але і від ряду випадкових факторів. Вплив однієї випадкової величини на іншу характеризується умов-ними розподілами однієї з них при фіксованих значеннях іншої (за наявності впливу згадані умовні розподіли відрізнятимуться один від одного).

Критерій згоди (Пірсона) - критерій перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу.

Ланцюг Маркова - послідовність випробувань, у кожному із яких з'являється тільки одна із k *несумісних* подій $A_1, A_2, ..., A_k$ повної групи, причому *умовна* ймовірність $p_{ij}(s)$ того, що в s-му випробуванні відбудеться подія A_j $\left(j=1, 2, ..., k\right)$, при умові, що в $\left(s-1\right)$-му відбулася подія A_i $\left(i=1, 2, ..., k\right)$, не залежить від результатів попередніх випробувань.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини - сума добутків всіх її можливих значень на їхні ймовірності.

Математична статистика - наука про математичні методи систематизації і використання статистичних даних для наукових і практичних висновків. У багатьох своїх розділах математична статистика спирається на теорію ймовірності, що дозволяє оцінити надійність і точність висновків, що робляться на підставі обмеженого статистичного матеріалу (напр., оцінити необхідний обсяг вибірки для отримання результатів необхідної точності при вибірковому спостереженні).

Медіаною (Me) неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконується умова $F(Me) = 0{,}5$.

Метод Монте-Карло - загальний метод розв'язування задач, в яких отримання аналітичного розв'язку є надто складним або неможливим. Полягає в представленні розв'язання у вигляді імовірнісного розподілу або функціоналу від нього, і отриманні наближеного результату методом відтворення випадкового експерименту із заданим розподілом.

Модою дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи. Для неперервної величини – це буде максимальне значення щільності ймовірності.

Незалежними випадковими подіями називають події, якщо поява однієї з них (A або B) не впливає на ймовірність появи іншої.

Неперервна випадкова величина – величина, яка приймає всі значення з деякого скінченого або нескінченного проміжку.

Несумісними називають події, якщо вони не можуть відбуватися одночасно.

Нульова гіпотеза - гіпотеза, що припускає відсутність систематичних розбіжностей між невідомими параметрами генеральної сукупності і величиною, яка одержана внаслідок обробки вибірки.

Обернена задача - задані вхідні і вихідні характеристики функції; необхідно знайти всі параметри функції, які здійснюють перетворення вхідних характеристик функції у вихідні.

Обсяг (об'єм) **сукупності** (вибіркової або генеральної) - кількість об'єктів цієї сукупності.

Перерізом *випадкової функції* називають випадкову величину, яка відповідає фіксованому значенню аргументу випадкової функції.

Полігон частот (відносних частот) – ламана лінія, відрізки якої сполучають координати точок $\left(x_i; n_i\right)$ або $\left(x_i; \omega_i\right)$, де x_i - числове значення варіанти, n_i - частота спостереження, ω_i - відносна частота спостереження.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна *нульова* гіпотеза.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна *нульова* гіпотеза.

Потужністю критерію називають ймовірність попадання критерію в критичну область при умові, що справедлива *альтернативна* гіпотеза.

Похибка (помилка, неправильність, неточність) - різниця *x-a*, де *a* - дане число, яке розглядається як наближене значення деякої величини, точне значення якої рівне *x*. Різниця *x-a* називається також **абсолютною похибкою**. Відношення *x-a* до *a* називається **відносною похибкою** числа *a*.

Початковим моментом k**-го порядку** випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k.

Промахи - грубі помилки при проведенні експерименту.

Протилежною до події A називається подія $\overline{A}$, якщо вона настає тільки тоді, коли не настає подія A.

Пряма задача - задані якісь початкові характеристики і ймовірність характеристик, що поступають "на вхід" функції (сигналу, процесу); необхідно знайти вихідні характеристики (сигналу, процесу).

Реалізацією *випадкової функції* $X(t)$ називають невипадкову функцію аргументу t, рівною якій може бути випадкова функція в результаті випробувань.

Регресія - залежність середнього значення якої-небудь величини від деякої іншої величини або від декількох величин. На відміну від чисто функціональної залежності $y = f(x)$, коли кожному значенню незалежної змінної x відповідає одне єдине значення величини y, при регресійному зв'язку одному і тому ж значенню x можуть відповідати залежно від випадку різні значення величини y.

Розігрування випадкової величини – відшукування можливих значень випадкової величини X (моделювання).

Розподіл ймовірностей - у простому випадку безліч станів $X = \{x, y, z, ...\}$, в яких може знаходитися об'єкт, звичайно (складається з n елементів). *Розподілом ймовірностей* при цьому називається сукупність n невід'ємних чисел (ймовірностей) p_x, p_y, p_z, ..., які в сумі дають 1.

Ряд частот - кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, ..., n_m$.

Середнім квадратичним (стандартним) відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із *дисперсії*.

Систематична похибка – це складова похибки вимірювання, яка залишається постійною або закономірно змінюється при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини.

Статистична сукупність - множина однорідних об'єктів.

Стохастична залежність - те саме, що й *імовірнісна* залежність.

Статистичний розподіл вибірки - перелік варіант та відповідних їм частот.

Статистичним критерієм називають випадкову величину K, яка використовується для перевірки *нульової* гіпотези.

Статистичні гіпотези - будь-які статистичні висновки, здобуті на підставі обробки вибірки.

Стаціонарна *випадкова функція* $X(t)$ - випадкова функція, математичне сподівання якої залежить тільки від різниці аргументів $t_2 - t_1$.

Сумісними називають події, якщо вони можуть відбуватися одночасно.

Схема Бернуллі $B(n, p)$ (n *і* p *– параметри схеми Бернуллі*) - при здійсненні n незалежних випробувань, подія A може відбутися зі сталою ймовірністю p, або не відбутися з ймовірністю q $(p + q = 1)$, тоді результат кожного випробування не залежить від результатів попередніх випробувань, тобто випробування *незалежні*.

Теорія ймовірностей - математична наука, що вивчає закономірності випадкових масових подій.

Точкова статистична оцінка - статистична оцінка, яка визначається одним числом.

Умовна ймовірність - ймовірність появи події *A* при умові, що подія *B* відбулася.

Функція розподілу ймовірності (інтегральна функція) $F(x)$ - функція аргументу x, яка визначає ймовірність випадкової події $X < x$.

Центральним моментом k**-го порядку** випадкової величини X називають математичне сподівання від $(X - M(X))^k$.

Щільність ймовірності $f(x)$ неперервної випадкової величини X - перша похідна від інтегральної функції $F(x)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Жлутенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник. Ч.1. Теорія ймовірностей. К.: КНЕУ, 2000. 304с.
2. Жлутенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С.. Теорія ймовірностей і математична статистика:навч.-метод. посібник. Ч.2. Математична статистика. - К.: КНЕУ, 2001. 336с.
3. Гмурман В.Е.. Теория вероятностей и математическая статистика.М.: Высшая школа, 2002. 479с.
4. Горбань С.Ф., Снижко Н.В.. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. Пособие. К.: МАУП, 1999. 168с.
5. Булига К.Б., Барановська Л.В.. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. К.: Видавництво Європейського Університету, 2000. 172с.
6. Гмурман В.Е.. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1999. 239с.
7. Бочаров П.П., Печинкин А.В.. Теория вероятностей. Математическая статистика. М.: Гардарика, 1998. 328с.
8. Черняк І.О., Обушна О.М., Ставицький А.В.. Теорія ймовірностей і математична статистика: збірник задач. К.: Знання, 2001. 200с.
9. Турчин В.М.. Математична статистика: навчальний посібник. Видавничий центр ”Академія”, 1999. 240с.
10. Юрченко М.О. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса: ОНПУ, 2017. 47 с.
11. Юрченко М.О. Конспект лекцій з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 - " Комп'ютерні науки та інформаційні технології " Частина 2. Одеса: ОНПУ, 2016. 62с.
12. Валь О.Д., Мельничук С.В., Королюк С.Л. Теорія ймовірностей… від найпростішого: навчальний посібник. Чернівці: Книги-XXI, 2004. 160с.
13. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемних Ю.Н.Математические методы в экономике: учебник.М.: МГУ им.М.В. Ломоносова, Издательство «Дело и Сервис», 1999. 368с.
14. Тичинська Л.М., Черепащук А.А. Теорія ймовірностей. Історичний екскурс та основні теоретичні відомості: Навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2010. 112с.